

Az Ampère-féle gerjesztési törvény korrekciója

Probléma:

Az Ampère-féle gerjesztési törvény és a töltésmegmaradás ellentmondása.

Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális alakja: (1) $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$

A töltésmegmaradás (kontinuitási egyenlet) differenciális alakja: (2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Az (1) egyenlet divergenciája: $\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H})}_0 = \nabla \cdot \vec{j}$

Tehát (1) alapján: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ (2) alapján: $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

A töltésmegmaradás biztosan igaz, így az (1) Ampère törvényt kell korigálnunk:

Mivel a Gauss törvény alapján: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ így: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

A Maxwell által alkalmazott korrekcióval: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ← eltolási áramsűrűség

lokális (differenciális) alak

Ellenőrzés divergenciát véve: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$0 = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ a töltésmegmaradást kaptuk

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény

Tehát Maxwell elméleti megfontolások alapján feltételezte, hogy a változó elektromos tér szintén örvényes mágneses teret kelt.

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ← eltolási áramsűrűség

Kiintegrálva a lokális (differenciális) alakot egy rögzített F felületre:

$$\int_F (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Stokes-törvényét

alkalmazva megkapjuk az integrális alakot: $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\text{eltolási áram}}$

Az elektromos indukciófluxust beírva: $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d\Psi}{dt}$

Az eltolási áram nem jár töltések áramlásával.

Az első tagban I_i a vezetési áramok algebrai összege.

Példa: Kondenzátor feltöltésénél (ill. kisülésénél) a lemezek közötti változó elektromos tér is ugyanúgy mágneses teret hoz létre mint a lemezekhez futó zsinórokban folyó vezetési áram a vezetékek körül.

A Maxwell-egyenletek rendszere

A XIX. század legnagyobb hatású eredménye, az elektromágneses hullámok elméleti alapja.

1. Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A} \rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

A mozgó töltések és az időben változó elektromos tér örvényes mágneses teret keltenek.

2. Faraday-Lenz féle indukciós törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.

A Maxwell-egyenletek rendszere

3. Az elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

integrális alak differenciális alak

Az elektromos tér forrásai a töltések.

4. A mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

integrális alak differenciális alak

A mágneses térnek nincsenek forrásai (nincsenek monopólusok).

Szükség van még az alábbi egyenletekre:

Lineáris anyagegyenletek: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ és $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ (csak közelítő jellegűek)

Differenciális Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$

Elektromágneses hullámeqyenlet

Valódi töltésektől és vezetési áramoktól mentes szigetelőkre ($\mu_r \approx 1$) az egyenletek:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Az anyagegyenletek továbbá: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Felhasználva az összefüggést: $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$

Ezekből levezethetők a homogén hullámeqyenletek a térerősségekre:

Bármely komponensre (i lehet x , y , vagy z):

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

Összehasonlítva az általános homogén hullámeqyenlettel egy tetszőleges u mennyiségre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \right) \quad \Delta: \text{Laplace operátor}$$

Az általános alakban v a hullám terjedési sebessége, tehát az elektromágneses hullámra:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad \text{amely vákuum esetén: } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{a fény sebessége vákuumban})$$

Az elméletileg így megjósolt EM hullámokat Hertz kimutatta kísérletileg 1888-ban.

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a **hullám forrásától elegendően messze** vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy z irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = E_{x0} \sin(\omega t - kz)$$

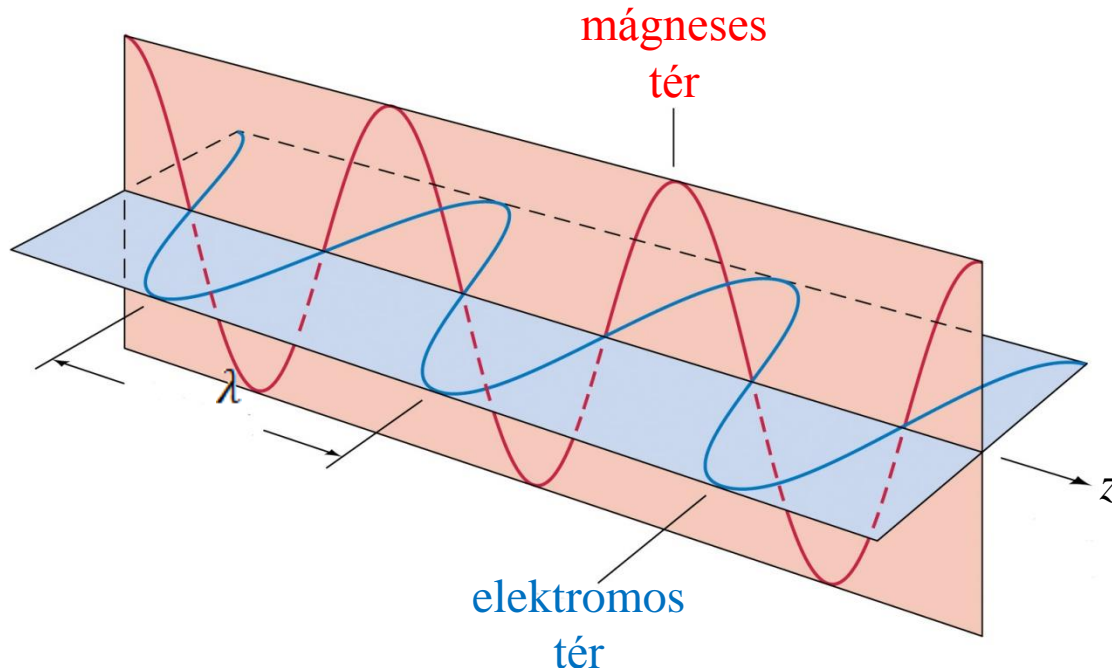
T : periódusidő λ : hullámhossz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

$$H_y = H_{y0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = H_{y0} \sin(\omega t - kz)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{körhullámszám}$$

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.



Az elektromágneses hullámban \vec{E} és \vec{H} merőleges, továbbá \vec{E} , \vec{H} , és \vec{v} jobbsodrású rendszert alkot (itt x , y , z). Az elektromágneses hullám **transzverzális**. Az elektromos és mágneses tér egymással azonos fázisban van.

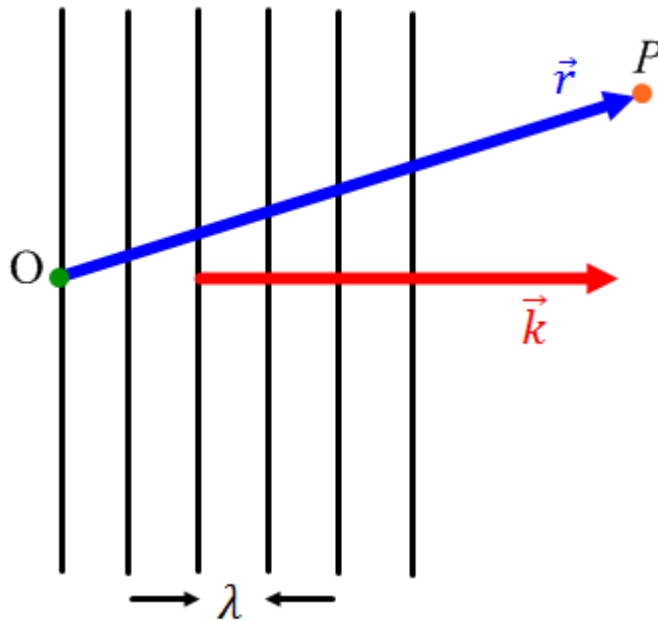
[Animáció kattintva!](#)

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



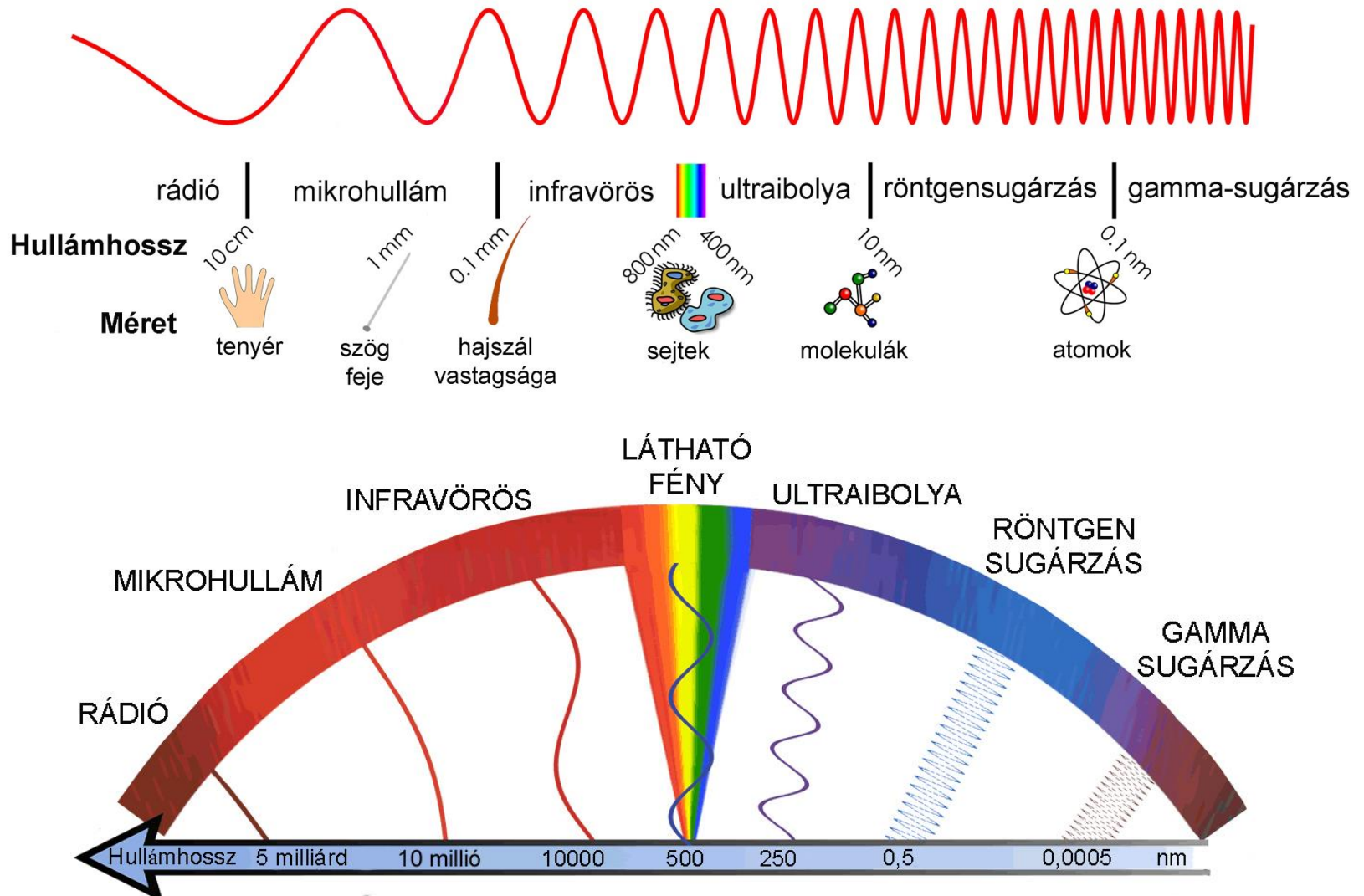
Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színekép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyságrenden keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:



Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiaterjedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\vec{S}] = \frac{\text{V A}}{\text{m m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$$\frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \rightarrow \quad \text{a csúcserőkre: } \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \quad \rightarrow \quad H_0^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} E_0^2$$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) H_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ &= \vec{e}E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{e} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

a hullám terjedési
 \vec{e} irányába mutató
egységvektor

Emellett írható még:
$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu}} \varepsilon E^2 \vec{e} = v \varepsilon E^2 \vec{e} = v w_{EM} \vec{e} = w_{EM} \vec{v}$$

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.

Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

[Animáció kattintva!](#)

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_2^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{10}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{20}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) \rangle \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases} +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} [\cos(2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \delta)] \rangle$$

Az első tag időátlagos 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - \delta] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[\Delta\varphi] \quad \Delta\varphi: \text{fáziskülönbség}$$

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$