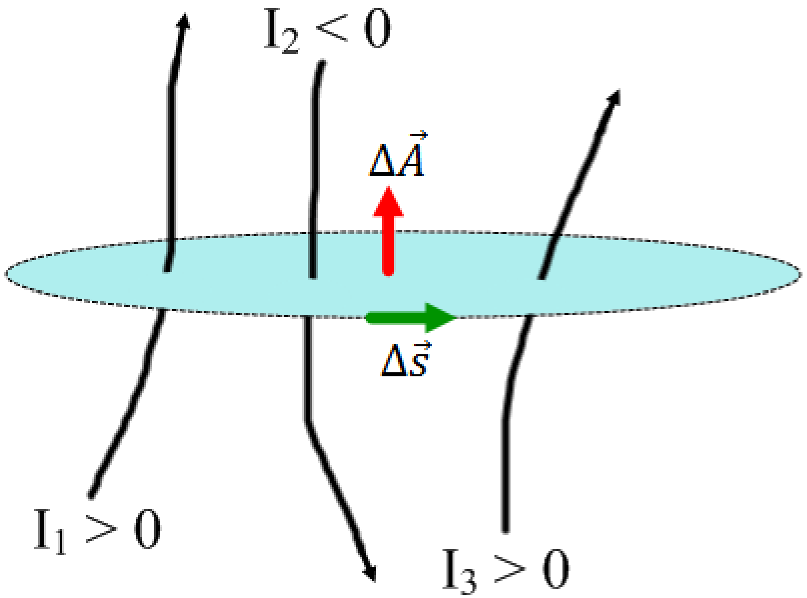
Az Ampère-féle gerjesztési törvény

Mozgó töltések (áramok) mágneses teret hoznak létre.

Vékony vonalas vezetőkre a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok előjeles összegével.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A\vec{n}$$



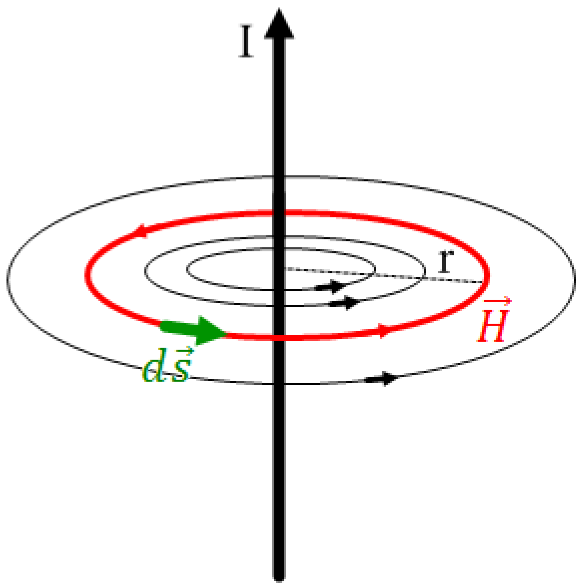
A normális irányába átfolyó áram **pozitív**.

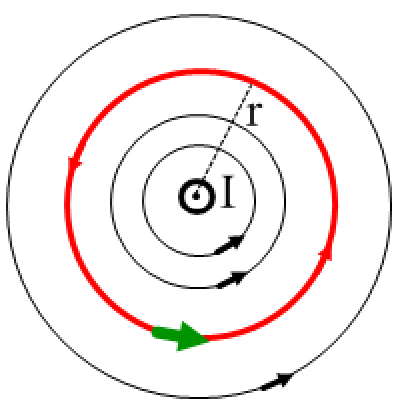
$\Delta\vec{s}$ és $\vec{n}$ irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

Alkalmazás: végtelen egyenes vezető tere





$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

Hengerszimmetria miatt: A térerősség nagysága csak az r távolságtól függ, iránya pedig tangenciális.

$$d\vec{s} \parallel \vec{H}$$

Tehát: $\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \oint_G ds = H 2r\pi$

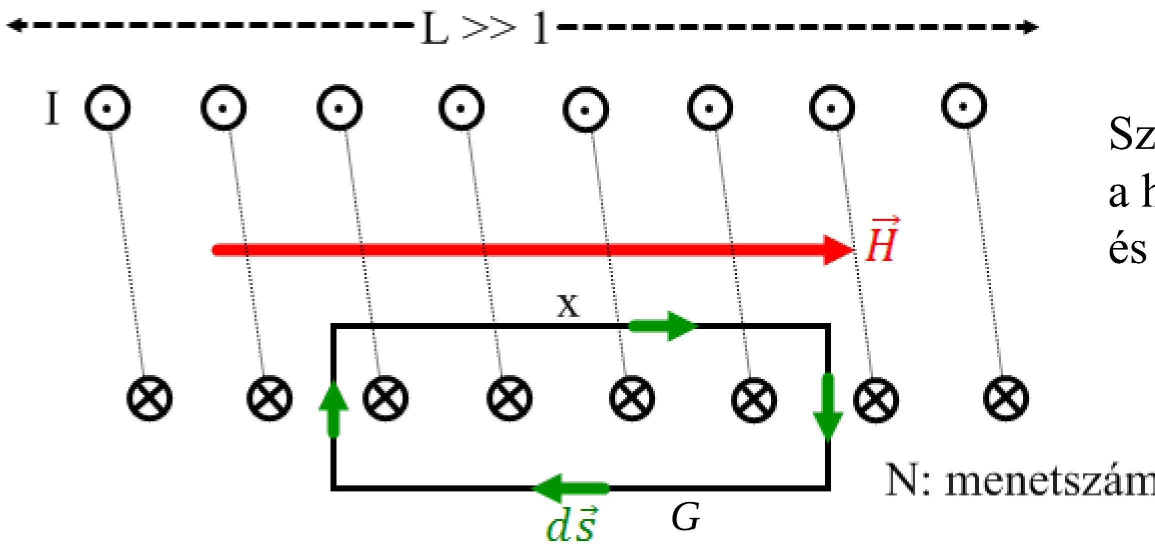
$$H 2r\pi = I$$

$$H = \frac{I}{2r\pi}$$

Vákuumban vagy levegőben pedig: $B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$

10. feladat

Alkalmazás: „végtelen” hosszú egyenes tekercs tere



Szimmetria miatt: A térerősség a hossztengellyel párhuzamos, és homogén. Kívül „nulla”.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = Hx$$

$$\sum_i I_i = \frac{NI}{L} x$$

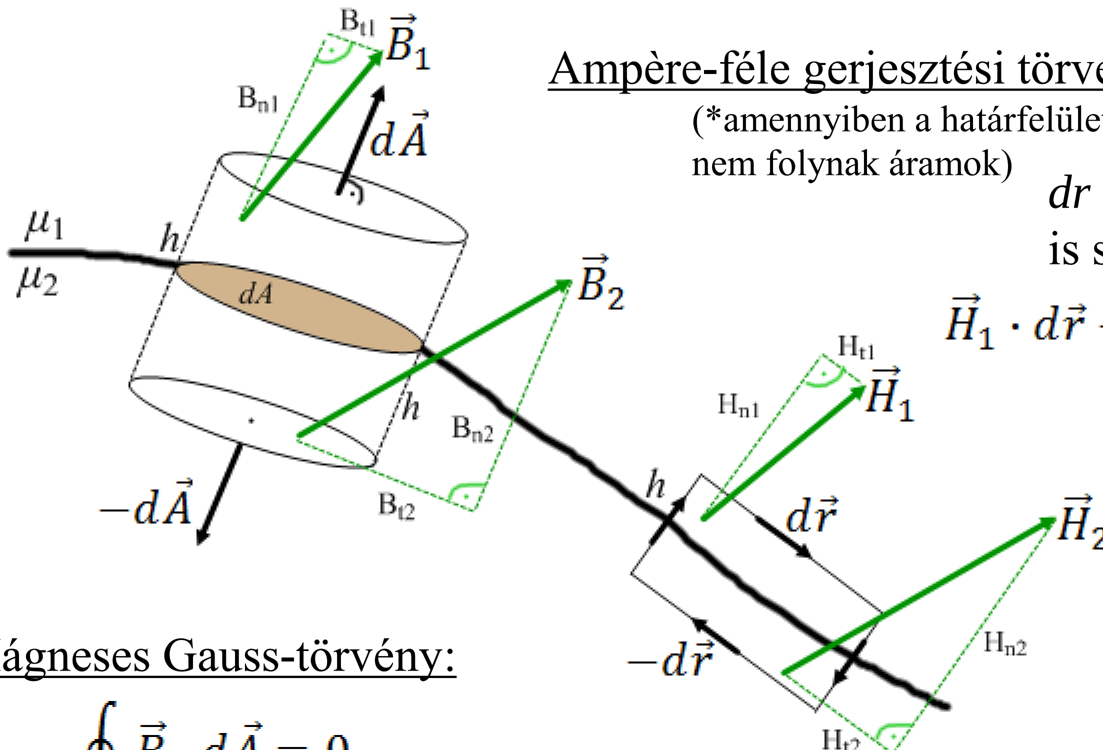
$$Hx = \frac{NIx}{L} \qquad H = \frac{NI}{L}$$

Vákuumban vagy levegőben pedig: $B = \mu_0 \frac{NI}{L}$

Ha a tekercsben valamilyen más anyag van: $B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}$

11. feladat

Határfeltételek*



<u>Ampère-féle gerjesztési törvény:</u> $\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0^*$

(*amennyiben a határfelületen nem folynak áramok)

dr nullához tart, h még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{H}_1 \cdot d\vec{r} - \vec{H}_2 \cdot d\vec{r} = H_{1t}dr - H_{2t}dr = 0$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

<u>Mágneses Gauss-törvény:</u>

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

dA nullához tart, h még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{A} - \vec{B}_2 \cdot d\vec{A} = 0$$

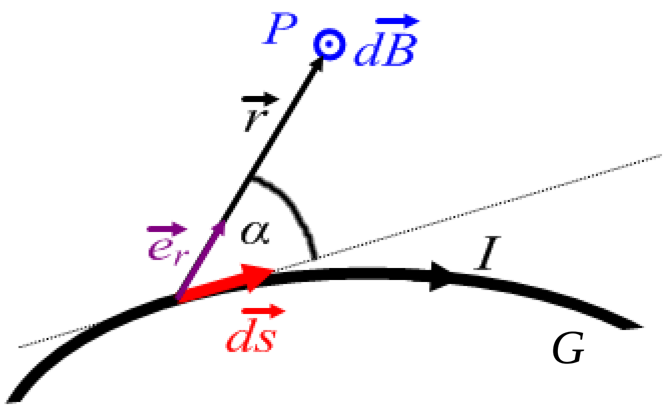
$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Biot-Savart törvény

Egy $Id\vec{s}$ áramelem az $\vec{r}$ helyvektorral jelzett P pontban a következő mágneses indukciót hozza létre:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$



A $\{d\vec{s}, \vec{r}, d\vec{B}\}$ jobbsodrású rendszert alkot (vektorszorzat).

Használva az $\vec{r}$ irányú egységvektort: $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{e}_r$$

A törvény ezen alakja vákuum vagy levegő esetén érvényes, ahol: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Ha a közegtől független alakot szeretnénk, akkor felírhatjuk a mágneses térerősségre is:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{e}_r$$

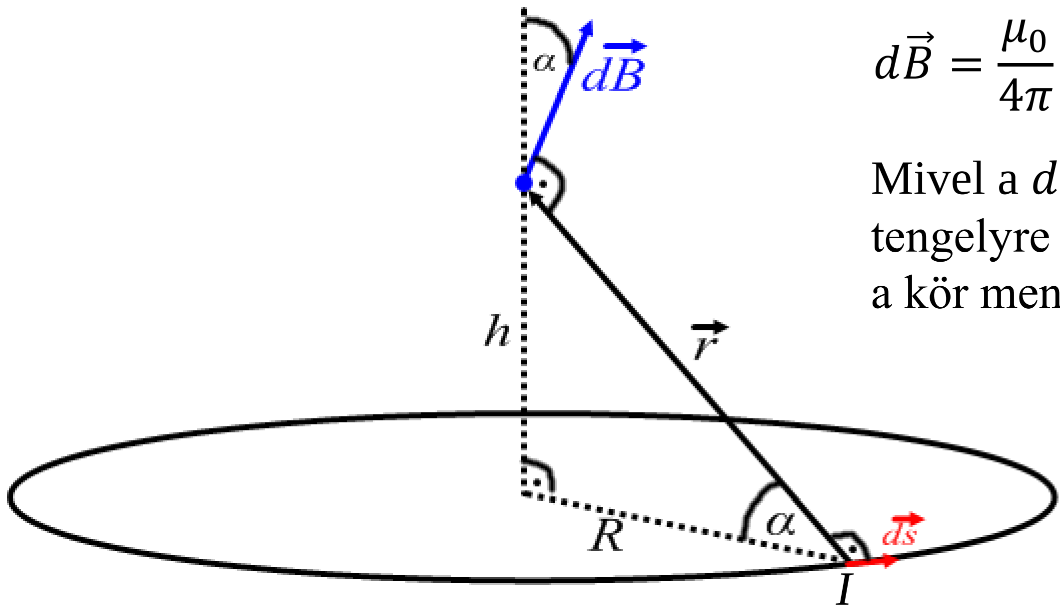
A G görbe által jelzett kiterjedt áramjárta vezető mágneses indukciójára:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_G \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \text{illetve} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_G \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

ha a G görbe zárt (köráram)

Biot-Savart törvény alkalmazása köráramra*

Számítsuk ki, hogy milyen mágneses indukciót hoz létre egy *I* árammal árjárt *R* sugarú kör alakú vezető a középpontján átmenő tengely mentén:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

Mivel a $d\vec{s}$ érintőirányú, a középponton áthaladó tengelyre mutató $\vec{r}$ vektor erre merőleges lesz a kör mentén végighaladva mindenütt:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Ids \cdot r \cdot \sin 90°}{r^3}$$

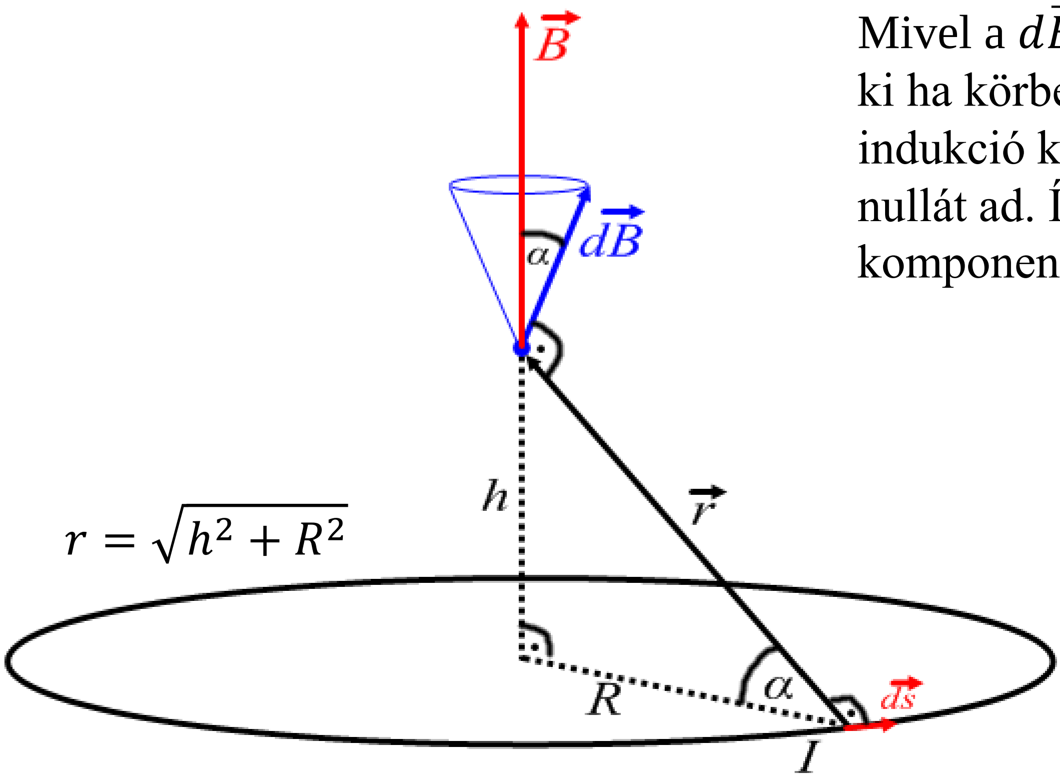
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Ids}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} ds$$

Az *r* távolság a körvonal minden pontjára ugyanaz: $r = \sqrt{h^2 + R^2}$

Tehát a *dB* járulék minden pontra ugyanakkora nagyságú a kör mentén végighaladva. Irányukat tekintve viszont a $d\vec{B}$ vektorok egy α nyílásszögű kúpot rajzolnak ki, a merőleges szárú szögek alapján:

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Köráram mágneses tere*



Mivel a $d\vec{B}$ vektorok egy α szögű kúpot rajzolnak ki ha körbehaladunk a köráram mentén, az eredő indukció köráramral párhuzamos komponense nullát ad. Így aztán csak a tengellyel párhuzamos komponenssel kell számolni:

$$dBcos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} ds \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Az eredő mágneses indukció:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi(h^2 + R^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \oint_G ds$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(h^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi = \frac{2\mu_0 I R^2 \pi}{4\pi(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

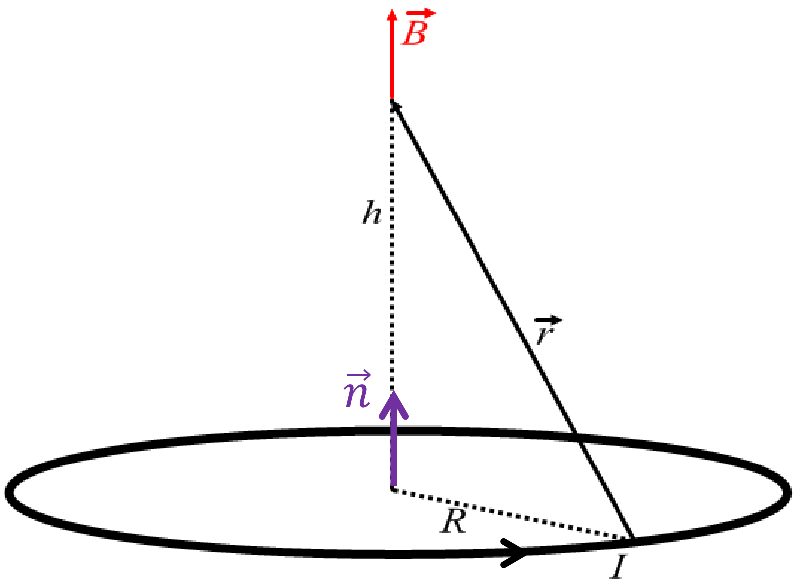
Egyszerűsítve az eredő indukció:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

A kör középpontjában ($h = 0$) nézve:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Mágneses dipólus által létrehozott mágneses tér*



Figyelembe véve, hogy az R sugarú köráram mágneses dipólmomentuma:

$$\vec{m} = IA \cdot \vec{n} = IR^2\pi \cdot \vec{n}$$

Az előző oldalról:

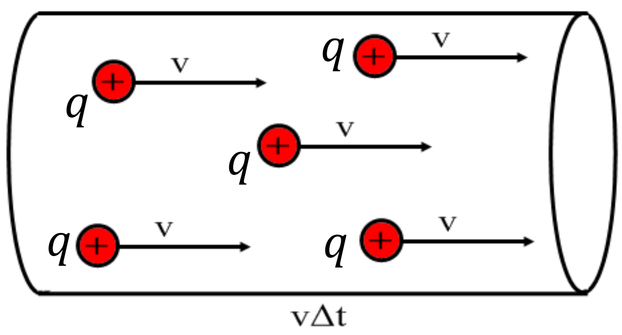
$$B = \frac{2\mu_0 IR^2\pi}{4\pi(h^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi(h^2+R^2)^{3/2}}$$

A köráramtól nagy távolságra ($h >> R$):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi h^3}$$

Az irányokat is figyelembe véve: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi h^3}\vec{m}$

Mozgó ponttöltés által létrehozott mágneses tér*



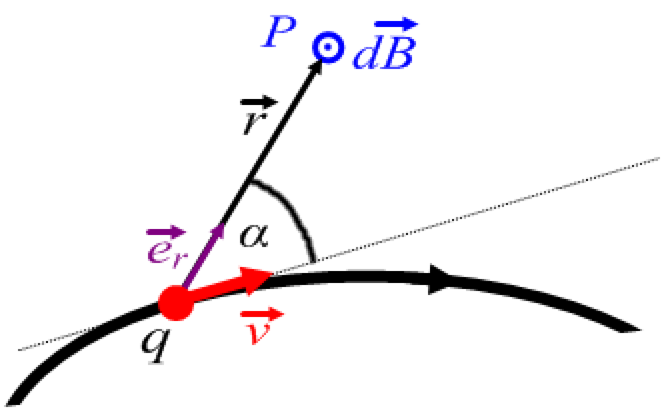
Az elektromos áramerősség definícióját felhasználva:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{\Delta t}$$

Az áramelem hosszára: $\Delta s = v\Delta t$

Ezek segítségével a Biot-Savart törvény alapján meghatározható a mozgó ponttöltések által keltett mágneses tér:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\frac{Nq}{\Delta t}\vec{v}\Delta t \times \vec{r}}{r^3}$$



Egyszerűsítve és *N*-el osztva, az egyetlen töltés által okozott mágneses indukció:

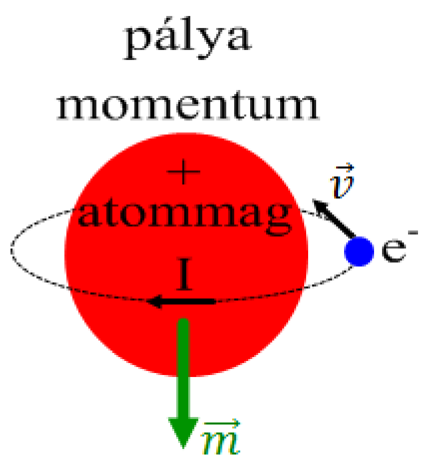
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \vec{v} \times \vec{e}_r$$

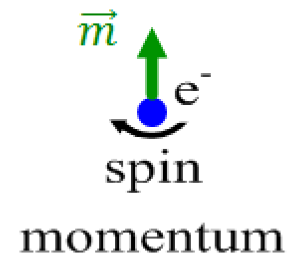
Anyagok mágneses tulajdonsága

Három fő csoportba sorolhatók:

- diamágnesek
- paramágnesek
- ferromágnesek

Az atomok mágneses tulajdonságaiért főleg az elektronok felelősek:

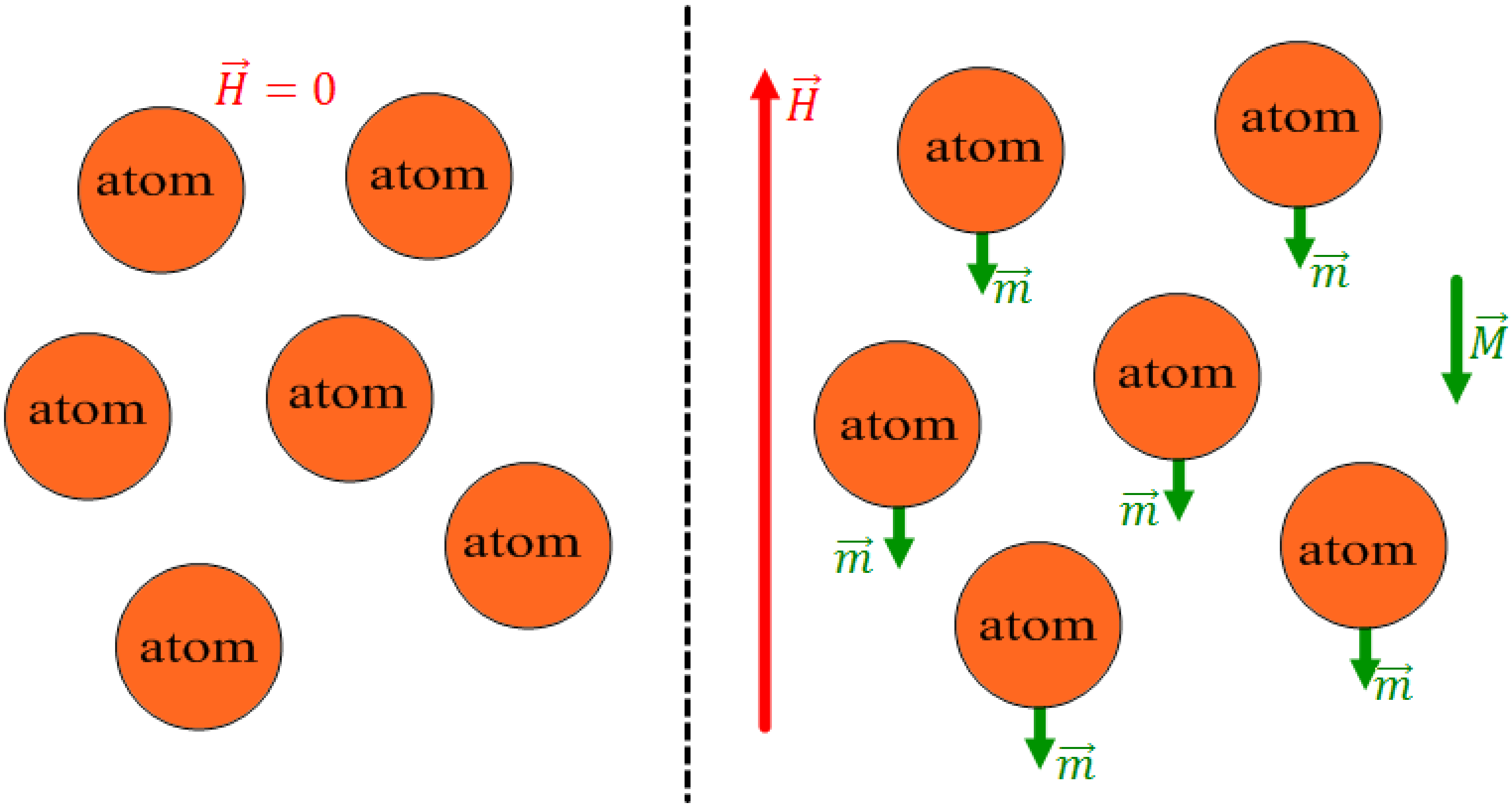




Speciális esetben (zárt elektronhéj esetén) ezek kiejthetik egymást, és ekkor az atom nem rendelkezik saját mágneses momentummal.

Diamágnesek

Diamágneses anyagok atomjai nem rendelkeznek saját mágneses momentummal.



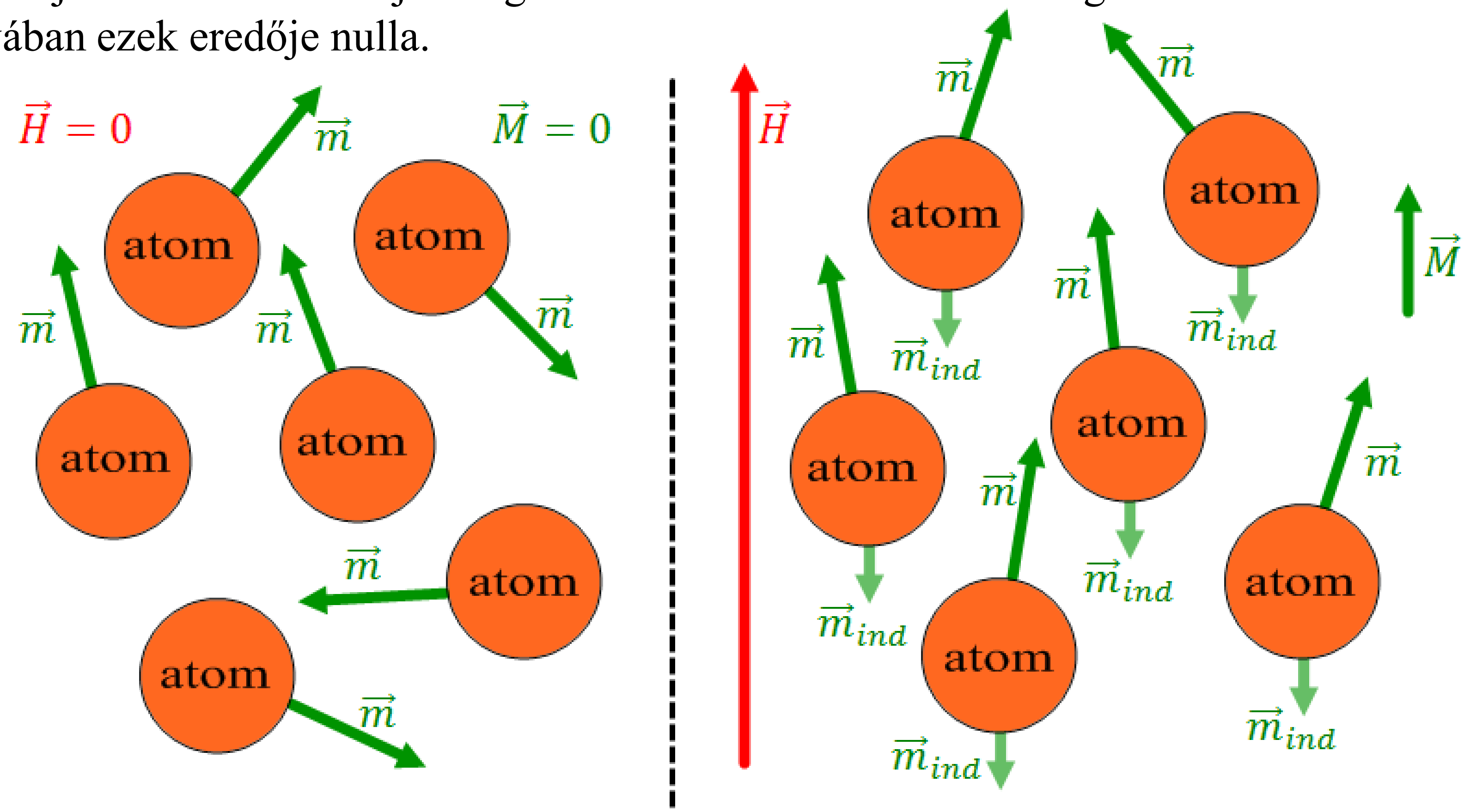
Külső mágneses tér hatására az atomokban mágneses momentum indukálódik.
Ezek iránya ellentétes a külső térrel (annak hatását gyengíteni igyekszik – Lenz törvény)

$\vec{M} = \chi \vec{H}$ $\quad \chi < 0$ $\quad \chi \approx -10^{-4}$ $\quad \mu_r = 1 + \chi \approx 0.9999$

Tehát a közegbeli indukció kisebb, mint a vákuumbeli $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ indukció.

Paramágnesek

Az atomjai rendelkeznek saját mágneses momentummal. A hőmozgásuk miatt külső tér hiányában ezek eredője nulla.



<u>Külső tér két hatás</u>: indukált mágneses momentum; saját momentumokat a tér irányába igyekszik befordítani a hőmozgás ellenében. Magasabb hőmérsékleten kevésbé tudja.

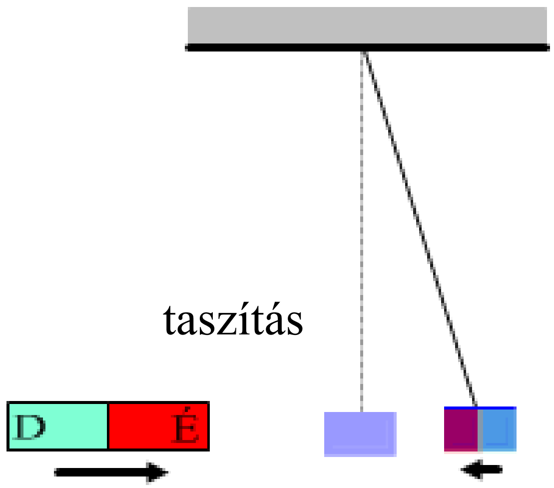
$\chi \approx 10^{-6} - 10^{-3}$

<u>Curie-törvény</u>: $\chi \sim \frac{1}{T}$

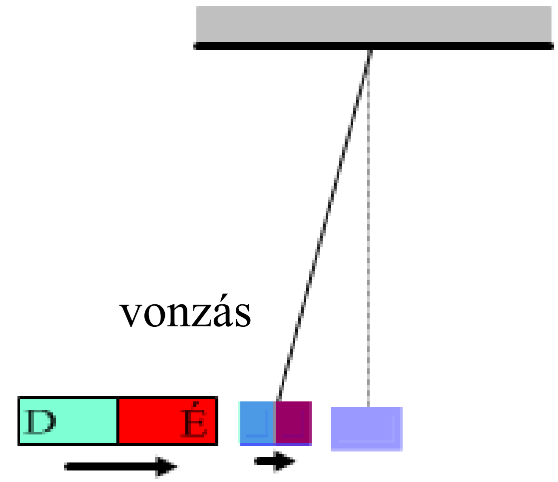
$\mu_r = 1 + \chi \approx 1.000001 - 1.001$

Dia- és Paramágnesek

<u>Diamágnesek</u>:
nemesgázok, víz, ezüst, arany, réz



<u>Paramágnesek</u>:
alkálifémek, alumínium, volfrám, oxigén

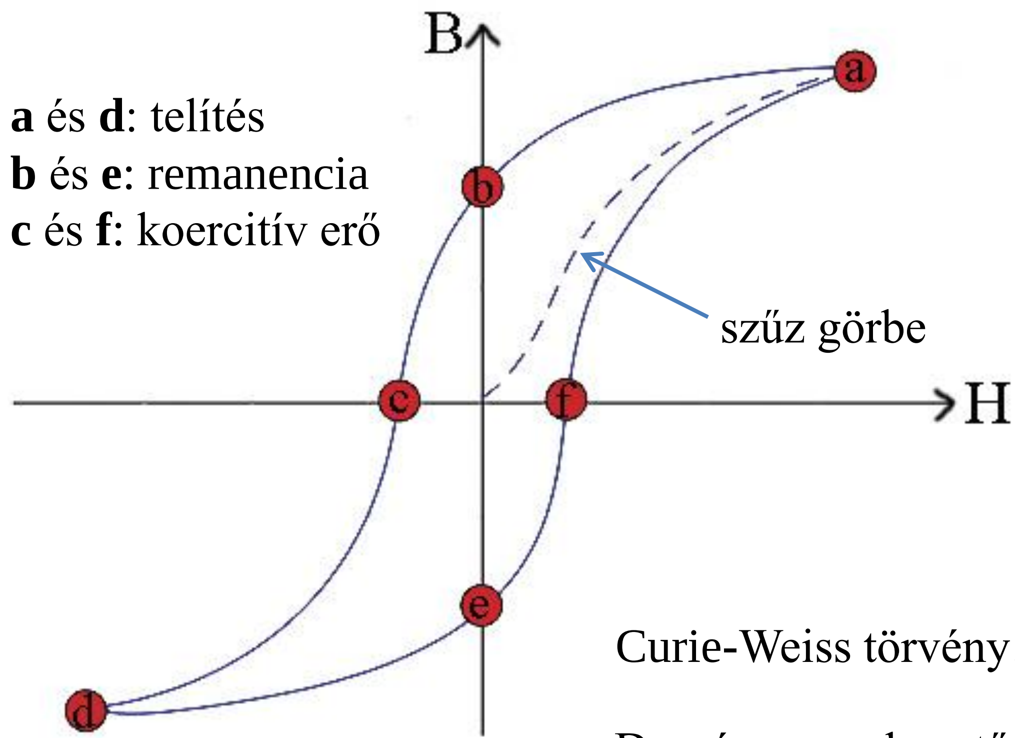


Ferromágnesek

Erősen mágnesezhető anyagok, többé-kevésbé megőrzik mágnesességüket.
pl. vas, kobalt, nikkel
A szuszceptibilitás értéke függ a külső tértől, a lineáris anyagegyenletek nem érvényesek.

$$\mu_r \approx 100 - 1000000$$

Jellemző rájuk a hiszterézis:



Nagy remanenciájú anyagok (kemény) használhatók permanens mágnesnek.

Kis remanenciájú (lágy) anyagok használhatók elektromágnesben és transzformátorban.

A Curie-hőmérséklet fölött a ferromágneses anyagok para-mágnesessé válnak.
Visszahűtve a szuszceptibilitás egyre növekszik.

Curie-Weiss törvény: $\chi \sim \dfrac{1}{T - T_C}$

Doménes szerkezetűek, a **domén**en belül a saját mágneses dipólmomentumok egy irányba állnak.

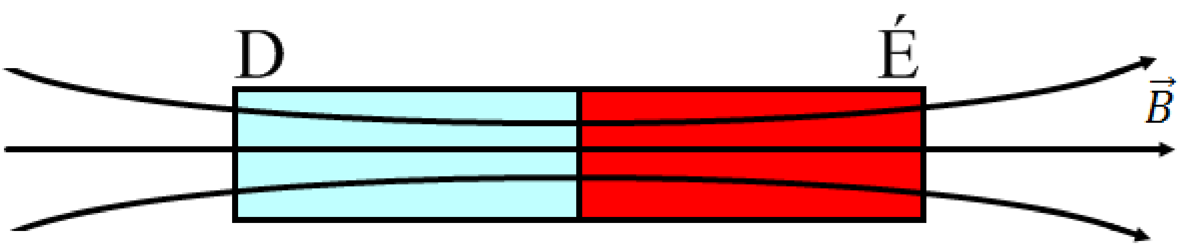
Az elektromágneses indukció jelensége

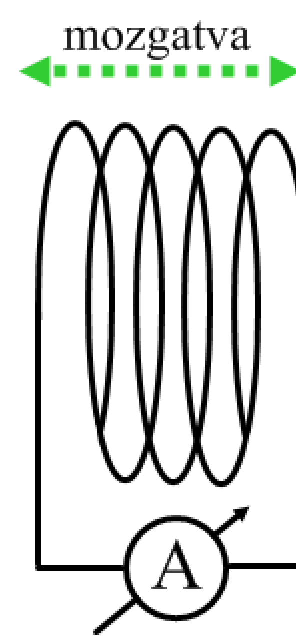
Korábban láttuk, hogy az elektromos áram hatására mágneses tér keletkezik (Ampère-féle gerjesztési törvény)

Kérdés, hogy vajon ez megfordítható-e, és a mágneses tér hatására keletkezhet-e áram:

Ha egy tekercs állandó mágneses térben nyugalomban van akkor semmi nem történik.

<u>Viszont az árammérő kilendül akkor amikor</u>:
- a tekercset vagy a mágnest mozgatjuk (egymáshoz képest), illetve forgatjuk.
- elektromágnes esetén amikor a teret ki- vagy bekapcsoljuk.





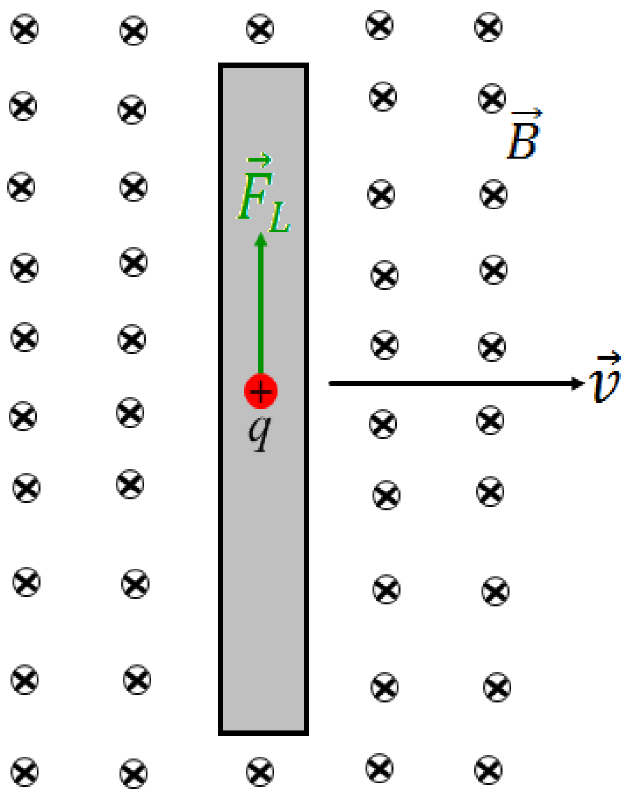
SZIMULÁCIÓK

Mozgási indukció

Ha egy vezetőt mágneses térben mozgatunk akkor a benne lévő töltésekre Lorentz-erő hat.

Ez az az idegen erő amely a töltések mozgatásáért felelős: $\vec{F}_* = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

Tehát az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \dfrac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$



A **Neumann-törvény** megadja a mozgó vezető *A* és *B* pontja között indukálódó elektromotoros erőt amint az a mágneses térben mozog:

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s}$$

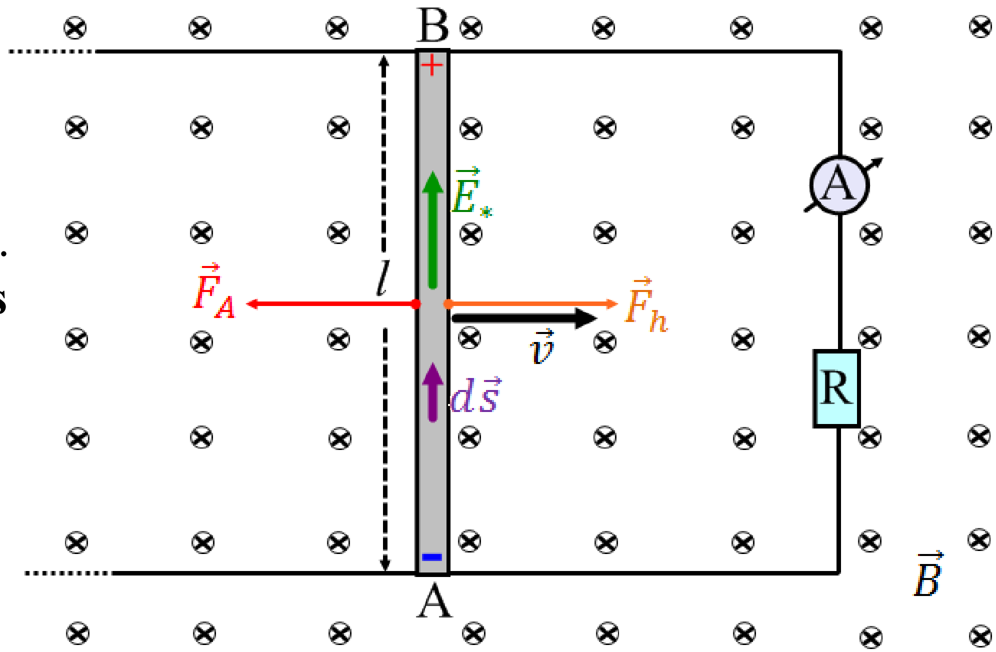
Ebben a jobbra látható egyszerű esetben, ha a rúd hossza *l*, az elektromotoros erő:

$$\varepsilon = vBl$$

Alkalmazás: Lineáris generátor

Ha a mágneses térben mozgó vezető végeit összekötjük egy párhuzamos sínpárral egy R ellenálláson keresztül, akkor a körben áram folyik.

Az áramerősség: $I = \frac{\varepsilon_{AB}}{R} = \frac{vBl}{R}$



Az áramjárta vezetőre hat az Ampère-erő amit egy húzóerővel kell kompenzálnunk. **Mechanikai teljesítményből elektromos teljesítmény a fogyasztón.**

Legyen h a mozgó rúd és az ellenállás közötti távolság. Ekkor: $v = -\frac{dh}{dt}$

A **mágneses indukciófluxus** ebben az egyszerű esetben: $\Phi = BA = Blh$

A mágneses indukciófluxus időderiváltja pedig: $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = \frac{d(BA)}{dt} = B\frac{dA}{dt} = -Blv = -\varepsilon_{AB}$

<u>Faraday és Lenz törvénye</u>: $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}$

12. feladat

Zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a hurok által körülfogott mágneses indukciófluxus változási gyorsaságának ellentettjével (másképpen az Ampère-erő segítene!)

Alkalmazás: Váltakozó áramú generátor

Vezető keret állandó ω szögsebességgel forog egy homogén mágneses térben.

Ha kezdetben $\vec{n} \parallel \vec{B}$ akkor: $\alpha = \omega t$

A mágneses indukciófluxus az idő függvényében:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA\cos\alpha = BA\cos\omega t$$

A Faraday-Lenz törvényt felhasználva:

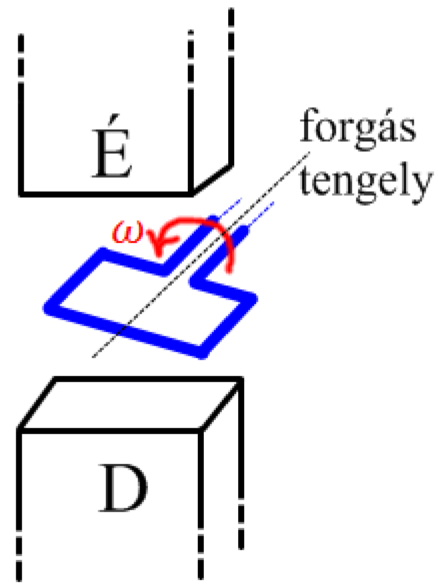
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = BA\omega\sin\omega t$$

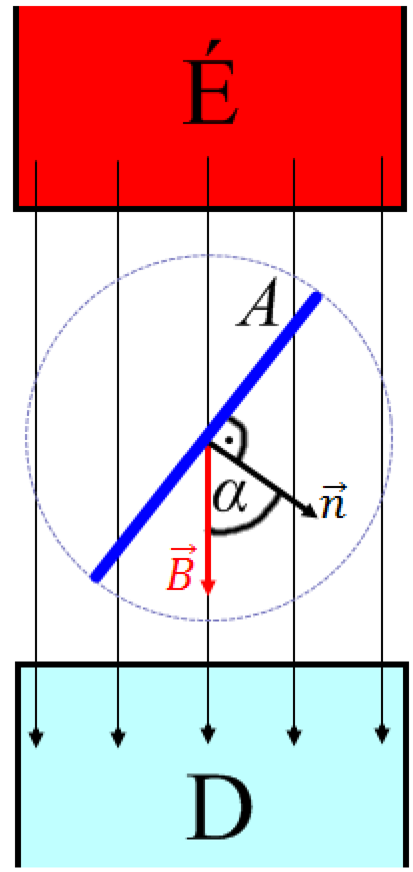
Ha a keret N menetből áll:

$$\varepsilon = NBA\omega\sin\omega t$$

Az elektromotoros erő maximális értéke: $\varepsilon_0 = NBA\omega$

Tehát az indukált elektromotoros erő: $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin\omega t$





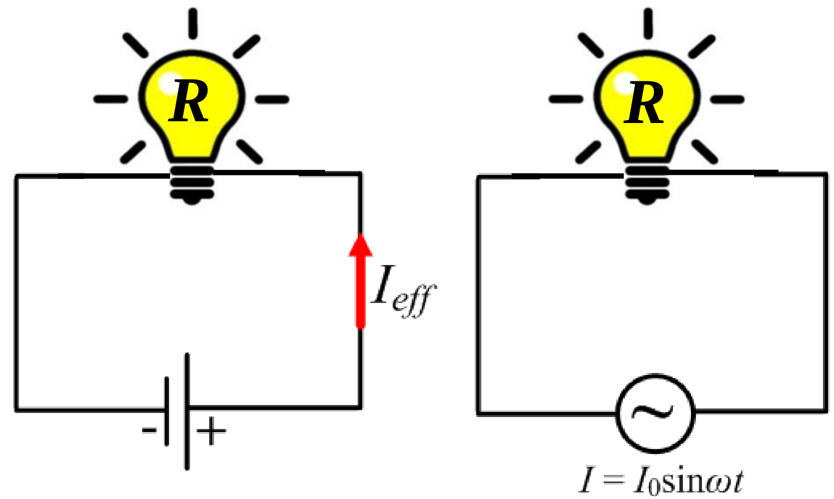
szemből nézve

ANIMÁCIÓ!

13. feladat

A feszültség és áramerősség effektív értéke

A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius (egyen-) áramot jelenti.



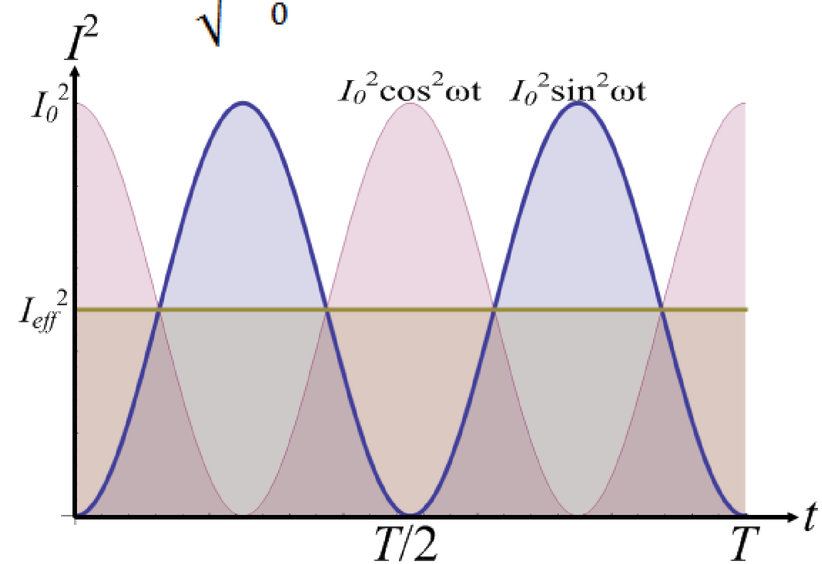
Tehát egy periódusidő alatt a fogyasztón az elektromos munkavégzés megegyezik:

$$I_{eff}{}^2 RT = \int_0^T I^2 R \mathrm{d}t$$

Innen R-el egyszerűsítve az effektív áramerősségre: $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 \mathrm{d}t}$

Szinuszosan változó áramra:

$$\int_0^T I_0{}^2 \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{I_0{}^2}{2}\int_0^T 1\mathrm{d}t = \frac{I_0{}^2 T}{2}$$



Tehát az effektív értékekre:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad (U = IR)$$

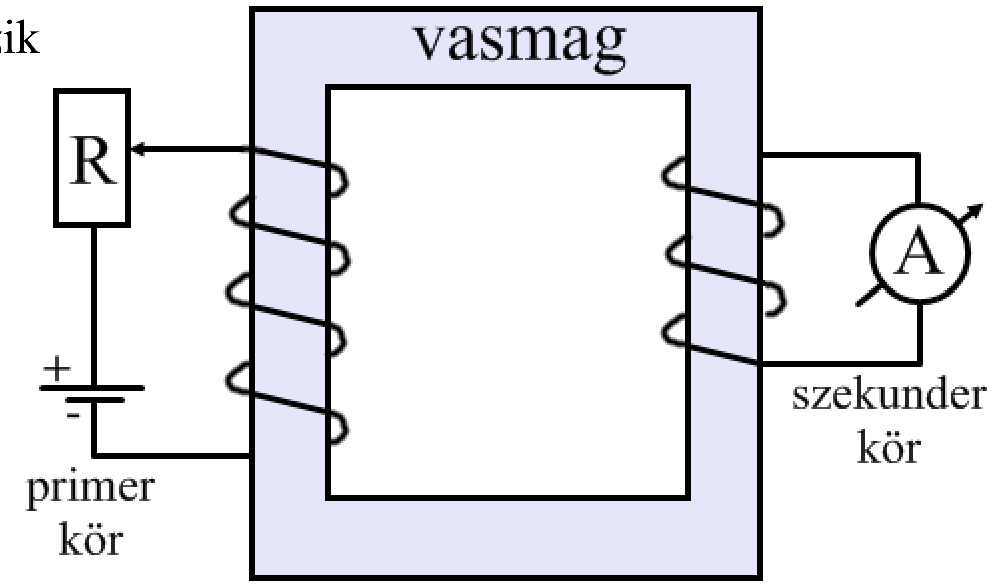
Nyugalmi indukció - Kölcsönös indukció

Láttuk, hogy a mágneses indukciófluxus változása elektromotoros erőt indukál.
A fluxus változhat azáltal, hogy:

- változik vagy elfordul a felület (mozgási indukció)
- a mágneses tér változik (nyugalmi indukció)

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

A változtatható ellenállást állítgatva változik az áramerősség és ezáltal a mágneses indukció. Tehát változik a mágneses fluxus. A vasmag biztosítja, hogy ezt szinte teljes mértékben körülfogja a szekunder tekercs.
Amíg a fluxus változik addig a szekunder körben áram folyik.



A magyarázat most nem a Lorentz-erő, hisz a szekunder kör nem mozog.

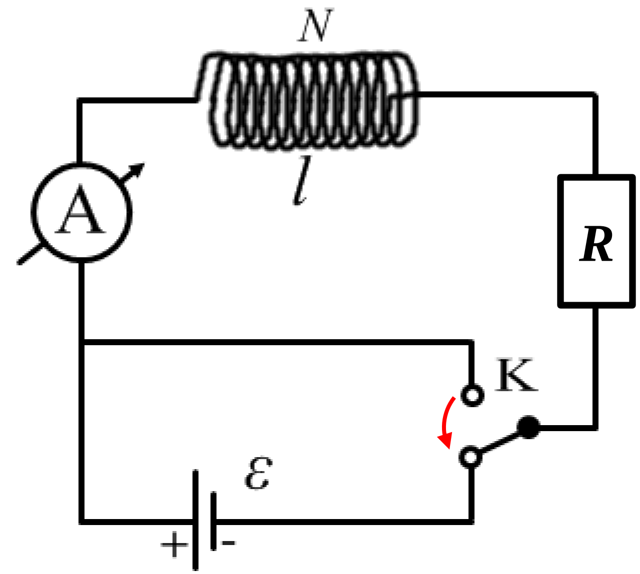
Az **időben változó mágneses tér elektromos teret indukál** és ez mozgatja a szekunder körben a töltéseket.

Ezt a jelenséget **kölcsönös indukció**nak is nevezzük.

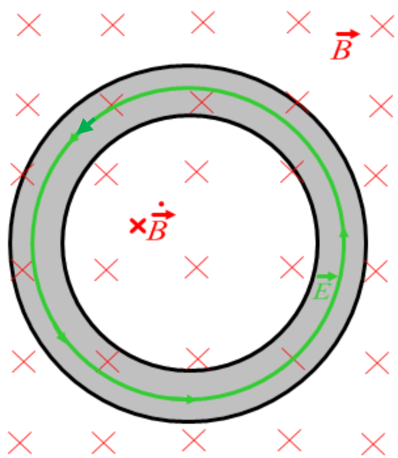
14. feladat

Nyugalmi indukció - Önindukció

A kapcsoló segítségével a feszültséget ráadhatjuk a tekercsre. Be- és kikapcsolásnál az áramerősség nem ugrásszerűen változik. A változó áram változó mágneses teret kelt, ami egy változó fluxust okoz. Az indukált elektromotoros erő az őt létrehozó hatást próbálja gyengíteni. (**Lenz-törvénye**)



A Faraday-Lenz törvényben az indukált elektromotoros erőt kifejezve az **elektromos térerősség** zárt görbe mentén vett integráljával:



$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Az elektromos térerősség integrálját a Stokes-tétel segítségével átalakítva felületi integrállá, majd állandó, nagyon kicsi felületet véve egy pont körül megkapjuk a lokális alakot:

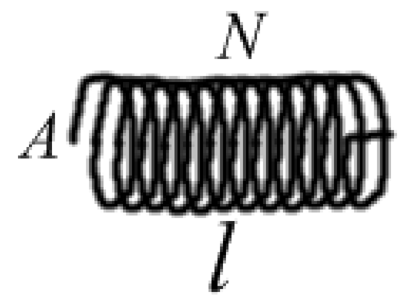
$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_F \mathrm{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{A} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \longrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A változó mágneses tér által indukált elektromos térerősség örvényes (**nem konzervatív**) és forrásmentes, míg a töltések által létrehozott elektromos tér forrásos és örvénymentes.

Szolenoid önindukciós együtthatója

Múlt előadáson láttuk, hogy hosszú egyenes tekercs esetén a mágneses térerősség és indukció:

$$H = \frac{NI}{l} \qquad B = \frac{\mu NI}{l}$$



Az N menetes A keresztmetszetű tekercsre a mágneses indukciófluxus:

$$\Phi = BAN = \frac{\mu NI}{l}AN = \frac{\mu N^2 A}{l}I$$

Tehát a fluxus arányos az őt létrehozó árammal. Az arányossági tényező az **önindukciós együttható** (L):

$$\Phi = \frac{\mu N^2 A}{l}I = LI \qquad \mathrm{L} = \frac{\mu N^2 A}{l} \qquad [\mathrm{L}] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H(Henry)}$$

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

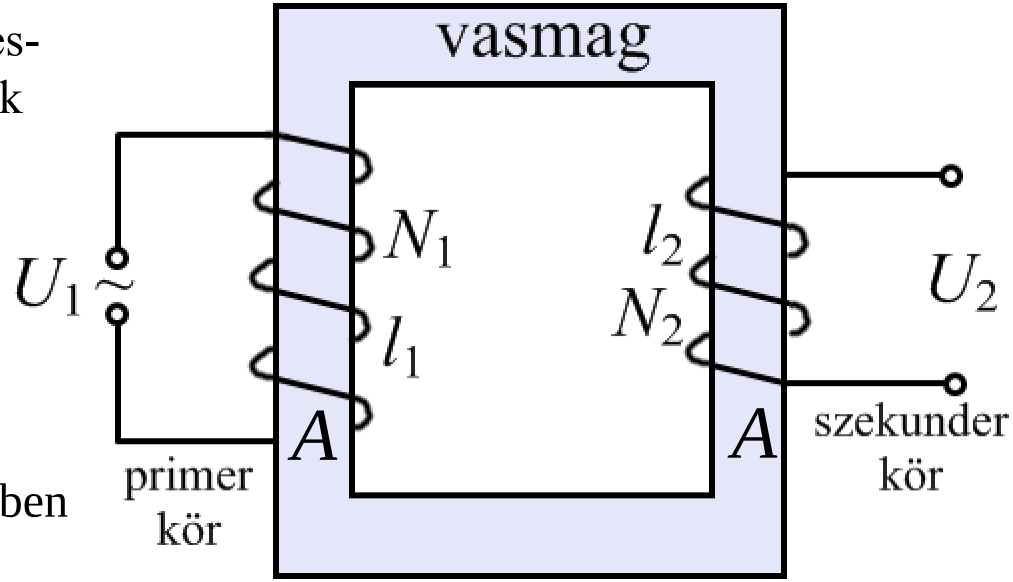
<u>A tekercsben lévő mágneses tér energiája</u>:

$$W_M = w_M V = \frac{1}{2}BHAl = \frac{1}{2}\mu H^2 Al = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{NI}{l}\right)^2 Al$$

$$W_M = \frac{1}{2}\frac{\mu N^2 A}{l}I^2 = \frac{1}{2}LI^2$$

Kölcsönös indukciós együttható

Szorosan csatolt szolenoidok esetén a vasmag miatt a menetenkénti mágneses-indukciófluxus ugyanaz, így a fluxusok arányosak a menetszámokkal.



A primer körre váltóáramot csatolva:

$$B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1}$$

A szekunder tekercs fluxusa az primerben folyó áram miatt (*A* ugyanaz):

$$\Phi_{12} = B_1 N_2 A = \frac{\mu N_1 N_2 A I_1}{l_1} = L_{12} I_1$$

A szekunder körben indukálódott elektromotoros erő: $\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}$

Szerepeket megcserélve kapnánk: $\Phi_{21} = B_2 N_1 A = \frac{\mu N_2 N_1 A I_2}{l_2} = L_{21} I_2$

Látható, hogy ha $l_1 = l_2$ akkor $L_{12} = L_{21} = M$ (**kölcsönös indukciós együttható**).

Huroktörvény általánosítása változó áramra

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}\cdot d\vec{A} = -L\frac{dI}{dt}$$

A tekercs L önindukciós együtthatója egyben a kör önindukciós együtthatója.
A kondenzátoron eső feszültség (g_2 görbe):

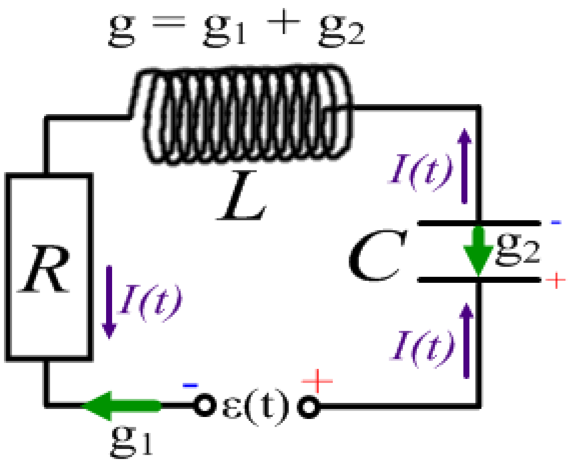
$$U = \frac{Q}{C}$$

A $g = g_1 + g_2$ zárt görbe mentén kiintegrálva az elektromos térerősséget (nem nulla, mert az indukált tér örvényes és nem konzervatív):

$$IR + \frac{Q}{C} - \varepsilon = \varepsilon_i$$

Tehát a huroktörvény általánosított egyenlete soros *RLC* körre:

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

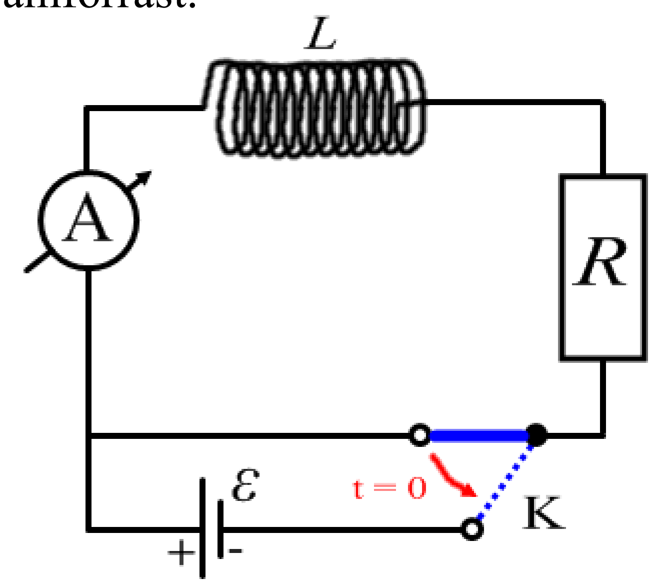


Valamilyen *t* időben *I(t)* áram folyik.

Bekapcsolási jelenségek *RL* körben*

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban rákapcsoljuk a körre az áramforrást.
Az *RL* körre felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon$$



Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$\frac{1}{L}dt = \frac{dI}{\varepsilon - IR}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között, miközben az áramerősség 0-ról I-re nő:

$$\int_0^t \frac{1}{L}dt = \int_0^I \frac{dI}{\varepsilon - IR} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{L}t = \left[\frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R}\right]_0^I = \frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R} + \frac{\ln\varepsilon}{R}$$

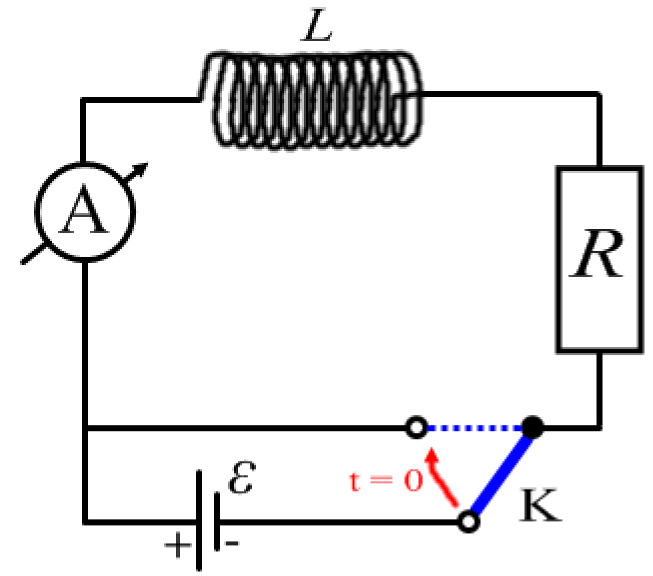
$$-\frac{R}{L}t = \ln\frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \quad\longrightarrow\quad e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \quad\longrightarrow\quad \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} - I$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében: $I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

ANIMÁCIÓ!

Kikapcsolási jelenségek *RL* körben*

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban lekapcsoljuk a körről az áramforrást.
Az *RL* körre felírva az általános huroktörvényt:



$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között,
miközben az áramerősség $I_0 = \varepsilon/R$-ről I-re csökken:

$$\int_0^t -\frac{R}{L}dt = \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} \;\longrightarrow\; -\frac{R}{L}t = \ln I - \ln I_0$$

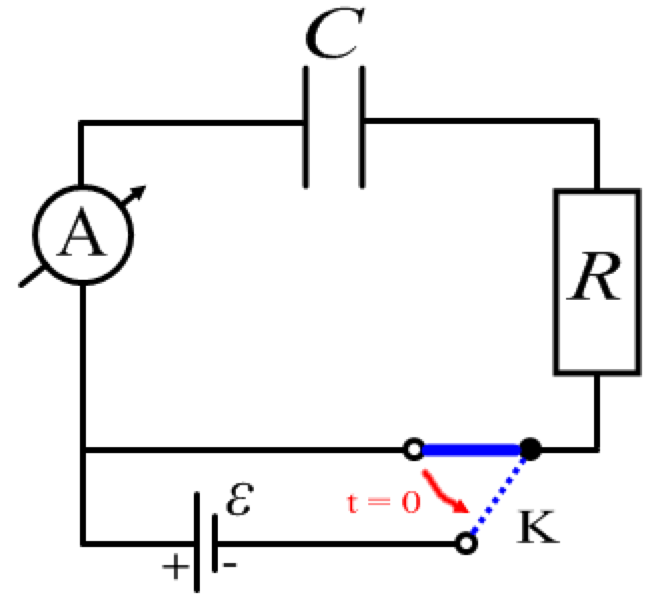
$$-\frac{R}{L}t = \ln\frac{I}{I_0} \;\longrightarrow\; e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{I}{I_0}$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében: $I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\qquad \tau = \frac{L}{R}$

Az *RL* kör időállandója τ adja meg, hogy mennyi idő alatt esik az áram e-ad részére.

Bekapcsolási jelenségek *RC* körben*

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban rákapcsoljuk a körre az áramforrást.
Az RC körre felírva az általános huroktörvényt:



$$IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon \qquad \left(I = \frac{dQ}{dt}\right) \quad \longrightarrow \quad R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{\varepsilon C - Q}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között,
miközben az töltés 0-ról Q-ra nő:

$$\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^Q \frac{dQ}{\varepsilon C - Q} \quad \longrightarrow \quad \frac{t}{RC} = \left[-\ln(\varepsilon C - Q)\right]_0^Q = \ln\varepsilon C - \ln(\varepsilon C - Q)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \quad \longrightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \quad \longrightarrow \quad Q = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

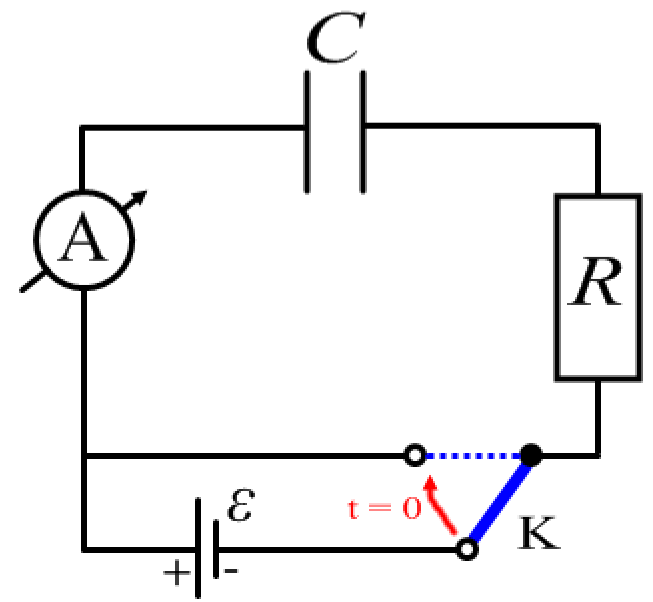
Deriválva az idő szerint: $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$

A τ időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a töltő áram e-ad részére.

Kikapcsolási jelenségek *RC* körben*

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban lekapcsoljuk az áramforrást és kisütjük a kondenzátort.
Az *RC* körre felírva az általános huroktörvényt:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \left(I = \frac{dQ}{dt}\right) \quad \rightarrow \quad -Q = RC\frac{dQ}{dt}$$



Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között,
miközben az töltés $Q_0 = \varepsilon C$-ről Q-ra csökken:

$$\int_0^t -\frac{dt}{RC} = \int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} \quad \rightarrow \quad -\frac{t}{RC} = \ln Q - \ln Q_0$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon C e^{-\frac{t}{RC}}$$

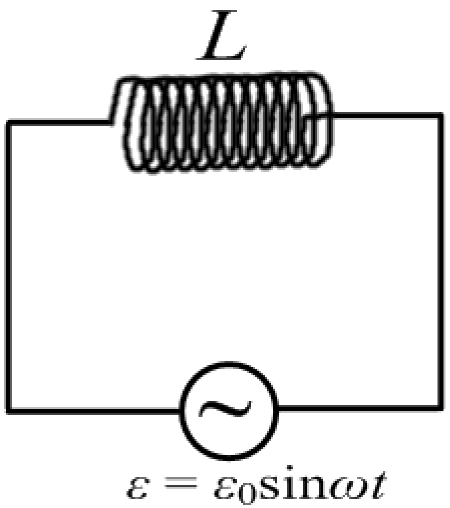
Deriválva az idő szerint: $I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$

A τ időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a kisütő áram *e*-ad részére.
A negatív jel most azért kell, mert a töltés csökken de mi szeretnénk pozitív értékeket.

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen*

A körre most is az általános huroktörvényt írjuk fel figyelembe véve hogy az elektromotoros erő most függ az időtől:

$$L\frac{dI}{dt} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$



Átrendezve és az idő szerint kiintegrálva kapjuk:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{L\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük az induktív ellenállást:

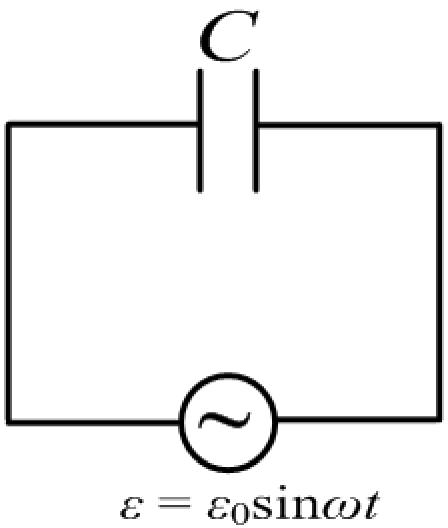
$$X_L = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = L\omega$$

Az áramerősség továbbá π/2 fáziskésésben van a tekercsre kapcsolt feszültséghez képest.

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen*

A kondenzátor a váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül.
Az általános hurokegyenletet felírva:

$$\frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$



Átrendezve és az idő szerint deriválva kapjuk az áramerősséget:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\varepsilon_0 \sin \omega t) = C\varepsilon_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük a kapacitív ellenállást:

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}$$

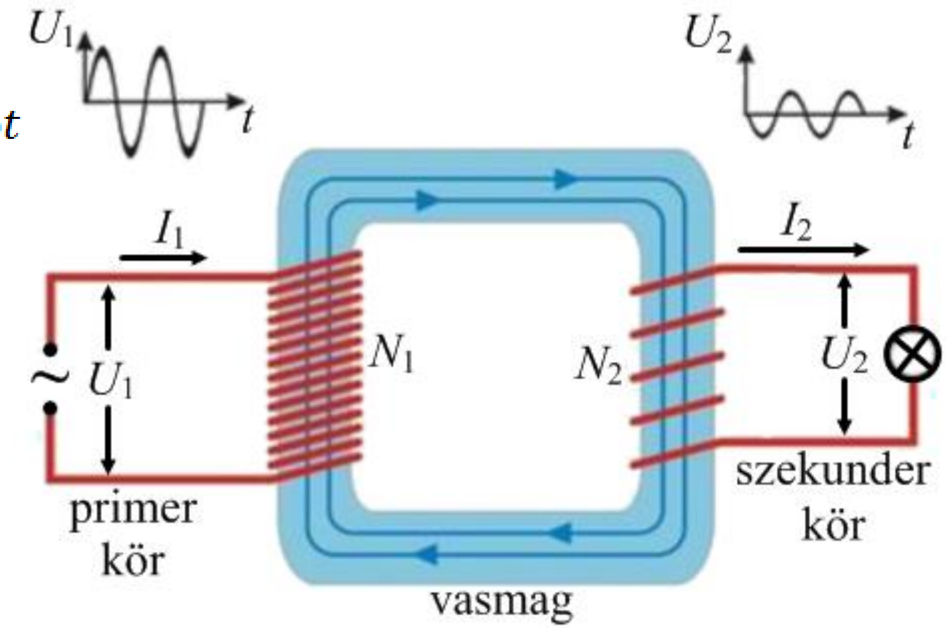
Az áramerősség továbbá π/2 fázissal siet a kondenzátorra kapcsolt feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

A transzformátor

A primer kör tekercse egy váltóáramú áramforrásra van kapcsolva:

$$U_1(t) = U_{1,0}\sin\omega t$$



Ennek hatására az áram a primer körben (elhanyagolható ohmos ellenállás):

$$I_1(t) = -\frac{U_{1,0}}{L_1\omega}\cos\omega t \qquad L_1 = \frac{\mu N_1{}^2 A_1}{l_1}$$

A primer tekercsben a mágneses indukció:

$$B_1(t) = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0}/l_1}{\frac{\mu N_1{}^2 A_1}{l_1}\omega}(-\cos\omega t)$$

$$B_1(t) = \frac{U_{1,0}}{N_1 A_1 \omega}(-\cos\omega t)$$

Az indukcióvonalak a vasmagban haladnak ezért a menetfluxus nem változik:

$$B_2 A_2 = B_1 A_1 = \frac{U_{1,0}}{N_1\omega}(-\cos\omega t)$$

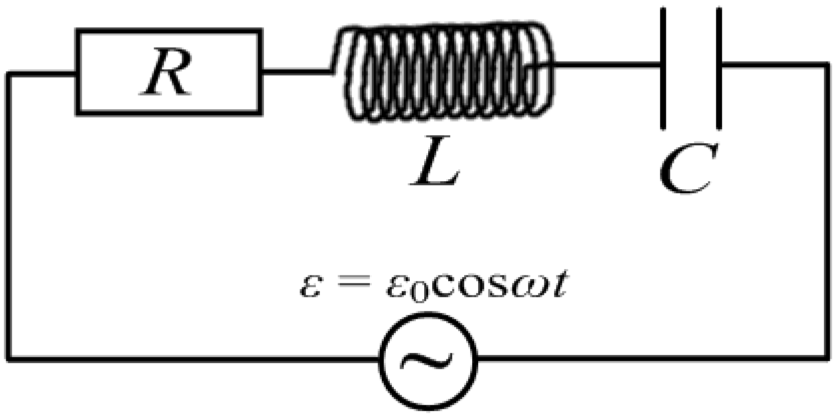
A szekunder tekercsben az indukálódott feszültség:

$$U_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(N_2 A_2 B_2)}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}U_{1,0}\sin\omega t$$

Tehát: $\frac{U_{2,0}}{U_{1,0}} = \frac{N_2}{N_1}$ Mivel $P_{1,0} = P_{2,0} \rightarrow U_{1,0}I_{1,0} = U_{2,0}I_{2,0}$

Feszültség feltranszformálásakor az áram letranszformálódik és fordítva: $\frac{I_{1,0}}{I_{2,0}} = \frac{N_2}{N_1}$

Soros *RLC* kör gerjesztett elektromágneses rezgései



Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

A kondenzátor töltése és az áramerősség közötti kapcsolat: $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ és $\dot{I} = \ddot{Q}$

Ezzel a huroktörvény egyenlete átrendezve:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett mechanikai rezgés mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!

A megfelelő mennyiségek:

x → Q
m → L (tehetetlenség)
b → R (csillapítás)
D → 1/C (rúgóállandó)
ε_0 → F_0 (gerjesztés csúcsértéke)
$\alpha = \frac{b}{2m}$ → $\frac{R}{2L}$ (csillapítási tényező)

Ez alapján a rezonancia körfrekvenciára várjuk:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Differenciálegyenlet soros *RLC* kör esetén

A másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ennek általános megoldása a homogén egyenlet (a jobb oldal zérus, lásd csillapodó rezgések) általános megoldása és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként írható fel: $Q_{inh.ált.} = Q_{hom.ált.} + Q_{inh.part.}$

A homogén egyenlet általános megoldása időben lecseng. Elegendően hosszú idő után, a tranziens jelenségeket követően, a megoldást az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása szolgáltatja. Ezt a megoldást keressük $Q(t)$ formájában:

Az eredeti egyenlet mellé felveszünk egy segédegyenletet is, fizikai jelentés nélkül:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$L\ddot{Q}'i + R\dot{Q}'i + \frac{1}{C}Q'i = \varepsilon_0 i \sin \omega t \qquad (\, i = \sqrt{-1}\,)$$

A két egyenletet összeadva:

$$L(\ddot{Q} + i\ddot{Q}') + R(\dot{Q} + i\dot{Q}') + \frac{1}{C}(Q + iQ') = \varepsilon_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Euler-összefüggés: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ Tehát: $\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$

Komplex mennyiségek soros *RLC* kör esetén

Bevezetjük a következő komplex mennyiségeket:

Komplex töltés: $\tilde{Q} = Q + iQ'$

Komplex elektromotoros erő: $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$

Ezeket beírva az egyenletbe:

$$L\ddot{\tilde{Q}} + R\dot{\tilde{Q}} + \frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\varepsilon}$$

Az egyenlet megoldását a következő alakban keressük: $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t}$

Ahol $\tilde{Q}_0$ a komplex töltés csúcsértéke (amplitúdója).

A komplex töltés deriváltja a komplex áram: $\dot{\tilde{Q}} = i\omega\tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = i\omega\tilde{Q} = \tilde{I} \;\rightarrow\; \tilde{Q} = \dfrac{\tilde{I}}{i\omega}$

Valamint: $\ddot{\tilde{Q}} = (i\omega)^2\tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2\tilde{Q}$

$$-L\omega^2\tilde{Q} + i\omega R\tilde{Q} + \frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\varepsilon}$$

$$i\omega\tilde{Q}\left(R - \frac{L\omega^2}{i\omega} + \frac{1}{i\omega C}\right) = \tilde{\varepsilon}$$

$$i\omega\tilde{Q}\left(R + iL\omega - i\frac{1}{\omega C}\right) = \tilde{\varepsilon}$$

$$\tilde{I}\left[R + i\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \tilde{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \tilde{I}\tilde{Z} = \tilde{\varepsilon}$$ komplex Ohm-törvény

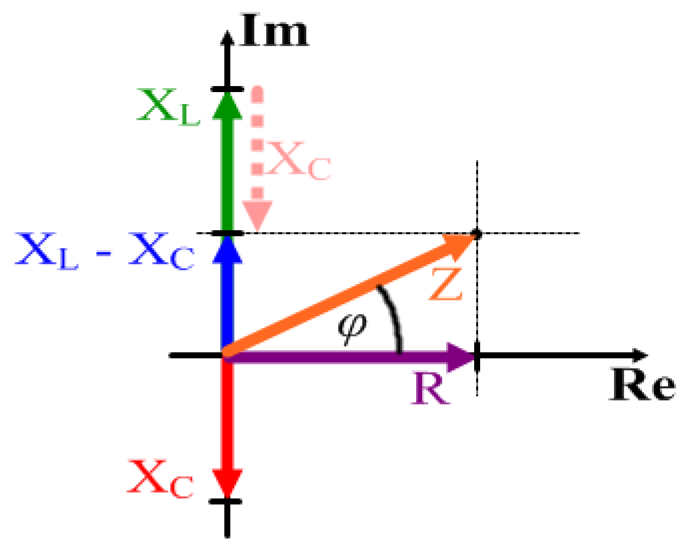
Komplex és valós impedancia

A komplex impedanciára kaptuk: $\tilde{Z} = R + i\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)$

Az induktív és kapacitív reaktanciák komplex alakja: $\widetilde{X_L} = iL\omega$ és $\widetilde{X_C} = -i\frac{1}{\omega C}$

$X_L = L\omega$ induktív reaktancia

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ kapacitív reaktancia



Az impedancia:

$$\left|\tilde{Z}\right| = Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A komplex impedancia valós tengellyel bezárt szögére: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$ és $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

Ezekkel felírva a komplex impedanciát: $\tilde{Z} = Ze^{i\varphi}$

Soros *RLC* körben folyó áram

A komplex Ohm-törvény alapján a komplex áramerősség:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}} = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{Z e^{i\varphi}} = \frac{\varepsilon_0}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 \cos(\omega t - \varphi) + i I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

A komplex áramnak csak a valós része rendelkezik fizikai jelentéssel (ez a megoldás):

$$\boxed{I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)}$$

ahol $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{Z}$ az áram csúcsértéke.

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

A φ szög a fáziskésés szöge. Ennyivel késik az áram a gerjesztő feszültséghez képest.

Ha $\varphi > 0$ akkor I késik ε-hoz képest, ha pedig $\varphi < 0$ akkor I siet ε-hoz képest.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad \text{és} \qquad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

(előző oldali fázisdiagram alapján)

Feszültség az áramköri elemeken

A különböző áramköri elemeken úgy kapjuk meg a komplex feszültségeket, hogy a komplex áramerősséget megszorozzuk a megfelelő komplex reaktanciával vagy az ellenállással.
A tényleges feszültséget a kapott eredmény valósrésze adja meg.

$$\widetilde{U}_R = \tilde{I}R = RI_0e^{i(\omega t-\varphi)} = U_{R0}e^{i(\omega t-\varphi)}$$

$U_R(t) = U_{R0}\cos(\omega t-\varphi)$, ahol $U_{R0} = RI_0$

$$\widetilde{U}_C = \widetilde{X_C}\tilde{I} = -i\frac{1}{\omega C}I_0e^{i(\omega t-\varphi)} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega C}I_0e^{i(\omega t-\varphi)} = \frac{1}{\omega C}I_0e^{i(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2})} = U_{C0}e^{i(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2})}$$

$U_C(t) = U_{C0}\cos(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2})$, ahol $U_{C0} = \frac{1}{\omega C}I_0$

$$\widetilde{U}_L = \widetilde{X_L}\tilde{I} = iL\omega I_0e^{i(\omega t-\varphi)} = e^{i\frac{\pi}{2}}L\omega I_0e^{i(\omega t-\varphi)} = L\omega I_0e^{i(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2})} = U_{L0}e^{i(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

$U_L(t) = U_{L0}\cos(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2})$, ahol $U_{L0} = L\omega I_0$

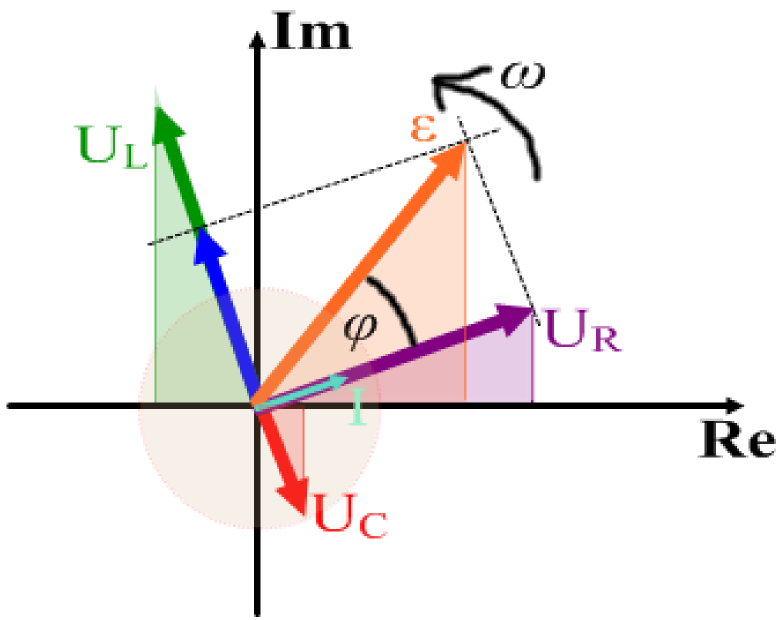
ANIMÁCIÓ!

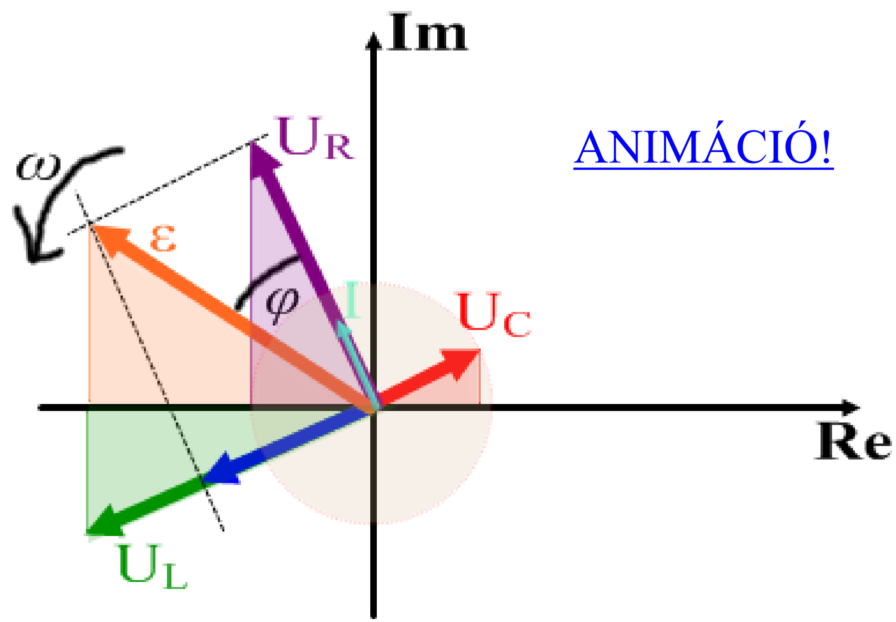
Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron π/2 fázissal késik, míg a tekercsen π/2 fázissal siet.

A komplex tárgyalásmód nem használható a kezdeti tranziens jelenség leírására, valamint akkor, ha $\varepsilon(t)$ nem szinuszos vagy koszinuszos függvény.

Feszültségek grafikus ábrázolása

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.





ANIMÁCIÓ!

Eredeti egyenlet: $L\dot{\tilde{I}} + R\tilde{I} + \frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \tilde{U}_L + \tilde{U}_R + \tilde{U}_C = \tilde{\varepsilon}$

Az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, a kondenzátoron π/2 fázissal késik, a tekercsen pedig π/2 fázissal siet. Az ábra ω szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre és elektromotoros erőre ugyanez vonatkozik.

Áramrezonancia soros *RLC* körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függnek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és áramrezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ebben az esetben a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg}\varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0 \qquad Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Feszültségrezonanciák soros *RLC* körben*

Az ohmos ellenálláson eső feszültség csúcsértéke: $U_{R0} = RI_0$
Mivel az *R* csak egy állandó, az ellenálláson eső feszültség rezonanciája az áramrezonanciával megegyező frekvencián történik:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A kondenzátoron eső feszültség csúcsértéke: $U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

A rezonancia körfrekvencia értékénél ennek szélsőértéke van, tehát a derivált nulla.

$$0 = \frac{dU_{C0}}{d\omega} \quad \rightarrow \quad \omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

A tekercs feszültségének rezonanciájára az előzőhöz hasonlóan:

$$0 = \frac{dU_{L0}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(\omega L I_0) = \frac{d}{d\omega} \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \rightarrow \quad \omega_L = \sqrt{\frac{1}{LC - \frac{C^2R^2}{2}}}$$

Teljesítmény soros *RLC* körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye: $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t\, I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

SOROS és PÁRHUZAMOS RLC körös példák: [VIDEÓ IDEKATTITVA!]()

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek: $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$ $\quad \dfrac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi}{2} = \cos\omega t\cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény: $P(t) = \dfrac{\varepsilon_0 I_0}{2}[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi]$

15. feladat

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}{}^2 R$$

ez rezonancia esetén a legnagyobb

Ezt hívják P_h hatásos teljesítménynek. A $\cos\varphi = R/Z$ szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény: $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ $\qquad$ Meddő teljesítmény: $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$

Az Ampère-féle gerjesztési törvény korrekciója

Probléma:

Az Ampère-féle gerjesztési törvény és a töltésmegmaradás ellentmondása.

Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális alakja: (1) $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$

A töltésmegmaradás (kontinuitási egyenlet) differenciális alakja: (2) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Az (1) egyenlet divergenciája: $\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right)}_{0} = \nabla \cdot \vec{j}$

Tehát (1) alapján: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ (2) alapján: $\nabla \cdot \vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

A töltésmegmaradás biztosan igaz, így az (1) Ampère törvényt kell korrigálnunk:

Mivel a Gauss törvény alapján: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ így: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

A Maxwell által alkalmazott korrekcióval: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ← eltolási áramsűrűség

lokális (differenciális) alak

Ellenőrzés divergenciát véve: $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \cdot \vec{j} + \nabla \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$0 = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$ a töltésmegmaradást kaptuk

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény

Tehát Maxwell elméleti meggondolások alapján feltételezte, hogy a változó elektromos tér szintén örvényes mágneses teret kelt.

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \longleftarrow$ eltolási áramsűrűség

Kiintegrálva a lokális (differenciális) alakot egy rögzített F felületre:

$$\int_F \left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot d\vec{A} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Stokes-törvényét alkalmazva megkapjuk az integrális alakot: $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\text{eltolási áram}}$

Az elektromos indukciófluxust beírva: $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d\Psi}{dt}$

Az eltolási áram nem jár töltések áramlásával.

Az első tagban I_i a vezetési áramok algebrai összege.

<u>Példa</u>: Kondenzátor feltöltésénél (ill. kisülésénél) a lemezek közötti változó elektromos tér is ugyanúgy mágneses teret hoz létre mint a lemezekhez futó zsinórokban folyó vezetési áram a vezetékek körül.

A Maxwell-egyenletek rendszere

A XIX. század legnagyobb hatású eredménye, az elektromágneses hullámok elméleti alapja.

1. Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

integrális alak differenciális alak

A mozgó töltések és az időben változó elektromos tér örvényes mágneses teret keltenek.

2. Faraday-Lenz féle indukciós törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

integrális alak differenciális alak

Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.

A Maxwell-egyenletek rendszere

3. Az elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

integrális alak   differenciális alak

Az elektromos tér forrásai a töltések.

4. A mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

integrális alak   differenciális alak

A mágneses térnek nincsenek forrásai (nincsenek monopólusok).

Szükség van még az alábbi egyenletekre:

Lineáris anyagegyenletek: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ és $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ (csak közelítő jellegűek)

Differenciális Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$