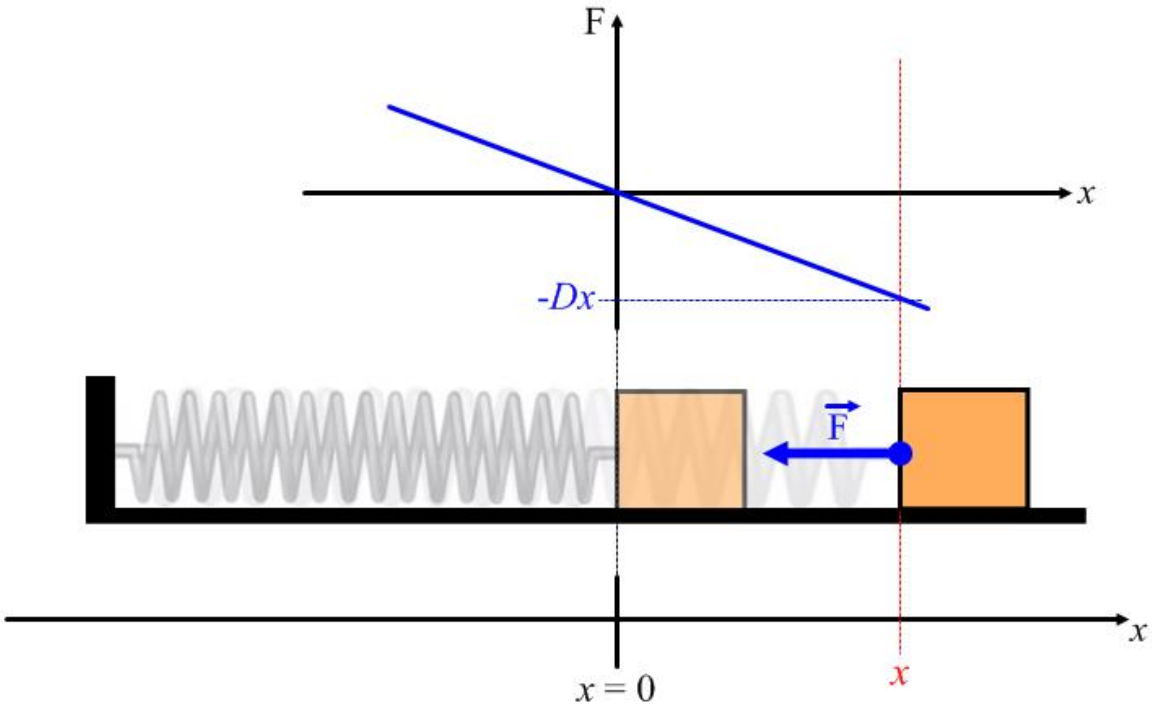
Rezgések

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóhoz rögzített test (ha minden más erő elhanyagolható vagy kiejti egymást, esetleg konstans, mint pl. a súlyerő).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

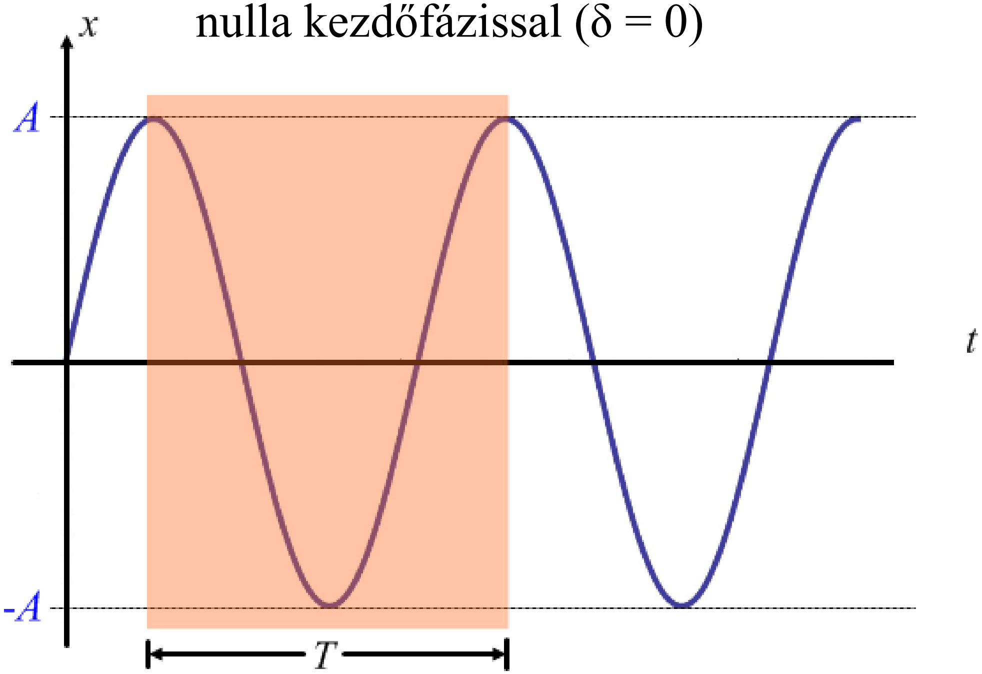
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{array} \right.$

ω: körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás, nulla kezdőfázissal (δ = 0)



$$x(t) = x(t+T)$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

Kinetikus és potenciális energia *

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva (δ = 0)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva (δ = 0) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

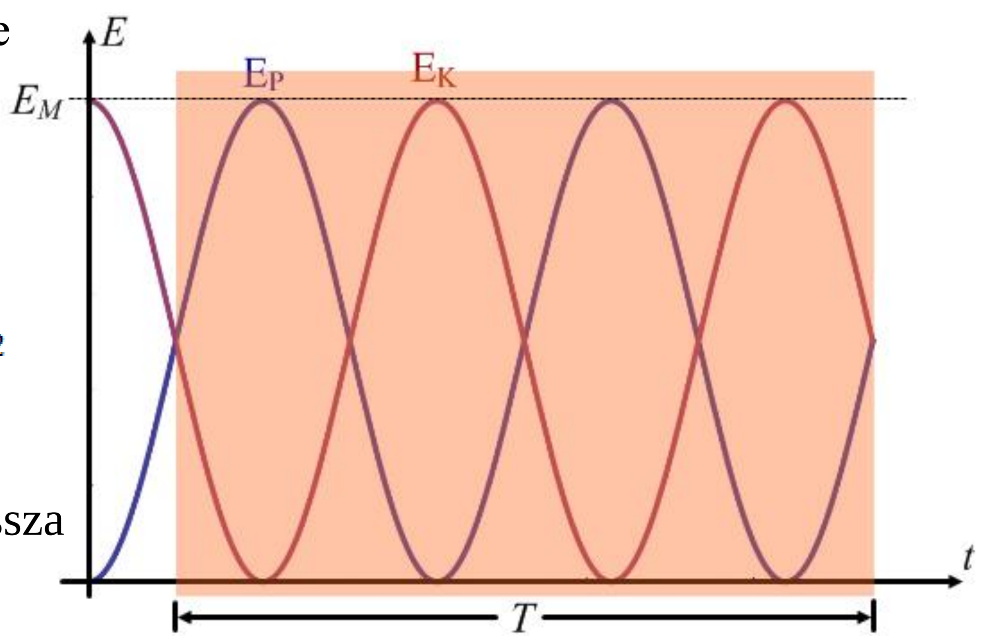
Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

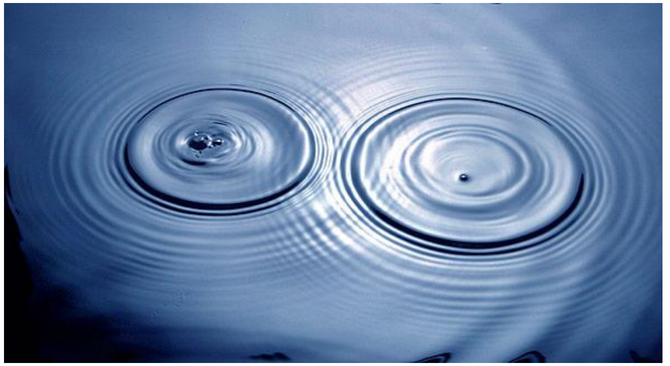
$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$



A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.

Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.
Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)



A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).
Ez határozza meg milyen időkésés van a két távoli pont rezgése között.
Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).
A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A\sin(\omega t)$
Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

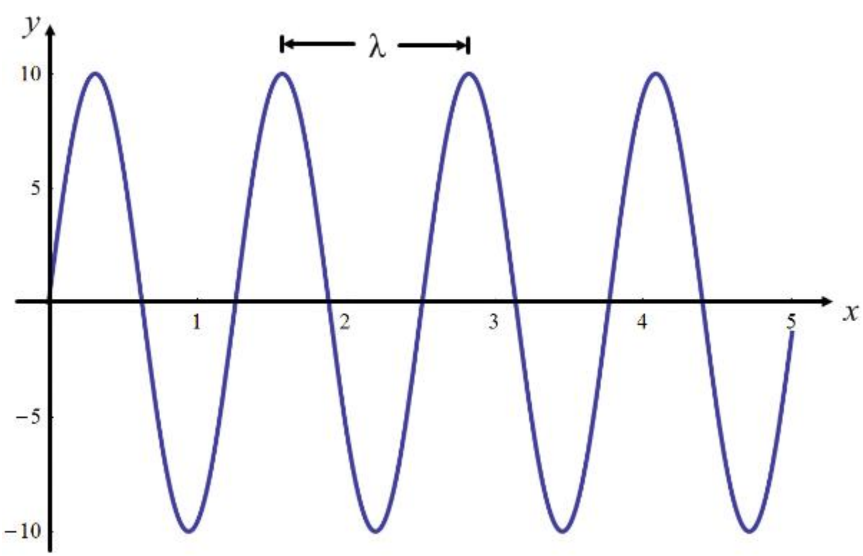
$$y(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

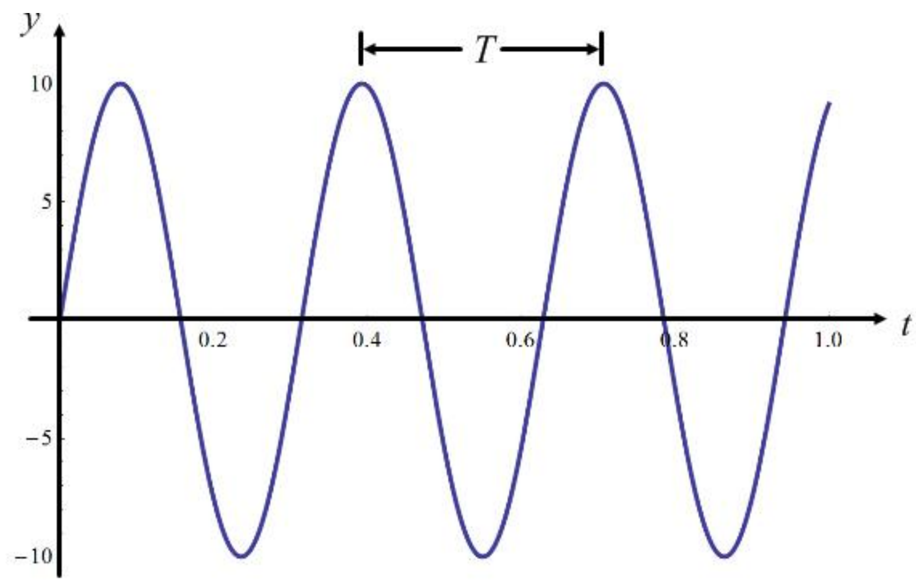
T: a rezgés **periódusideje** ω: a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
λ: a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$
k: **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $\boxed{c = \lambda f}$

Hullámok: hely és időfüggés *

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

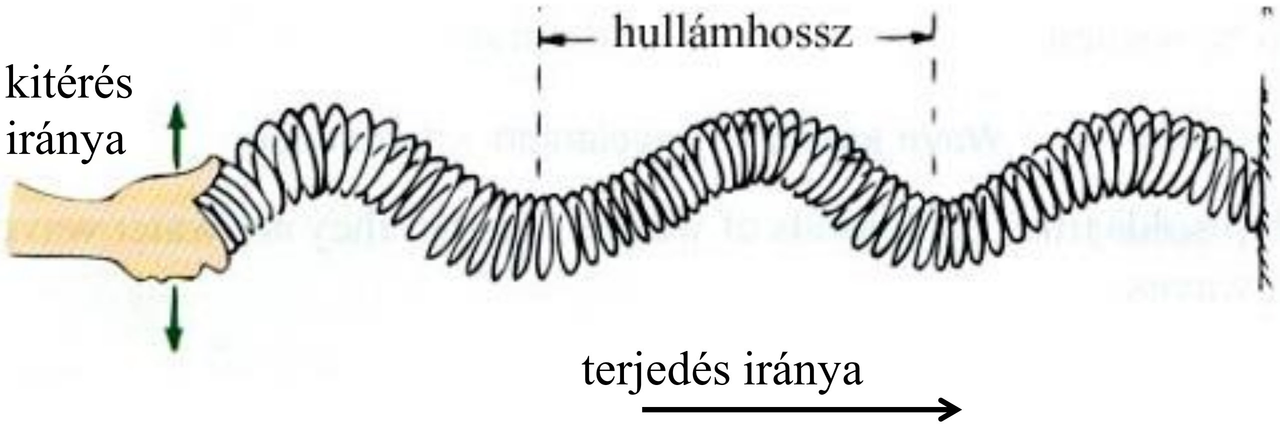


A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

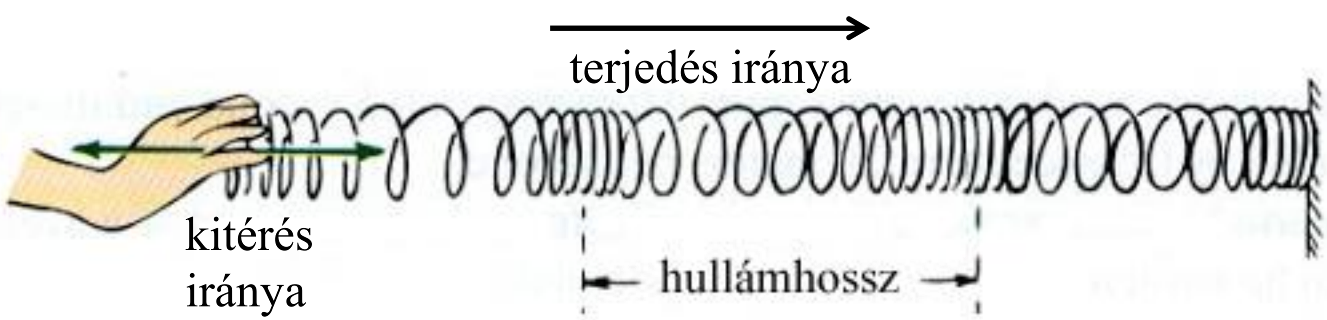


Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok *

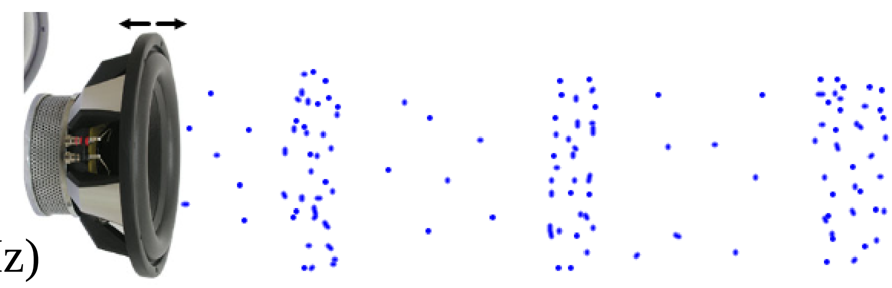


transzverzális hullám: a kitérés merőleges a terjedési irányra



longitudinális hullám: a kitérés párhuzamos a terjedési iránnyal

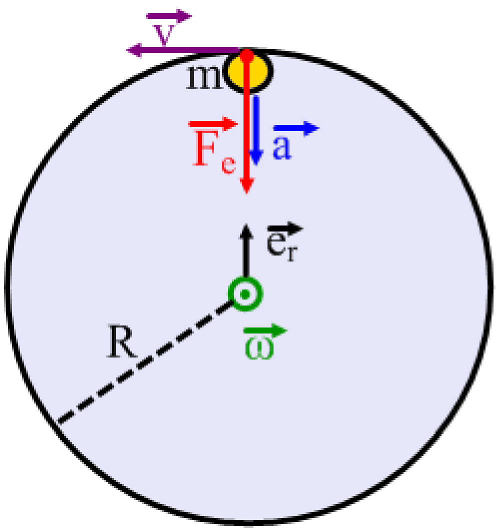
a hang is longitudinális hullám (20Hz – 20kHz)



Körmozgás és forgómozgás

Egyenletes körmozgás dinamikája

<u>Egyenletes körmozgás:</u> A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötélerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

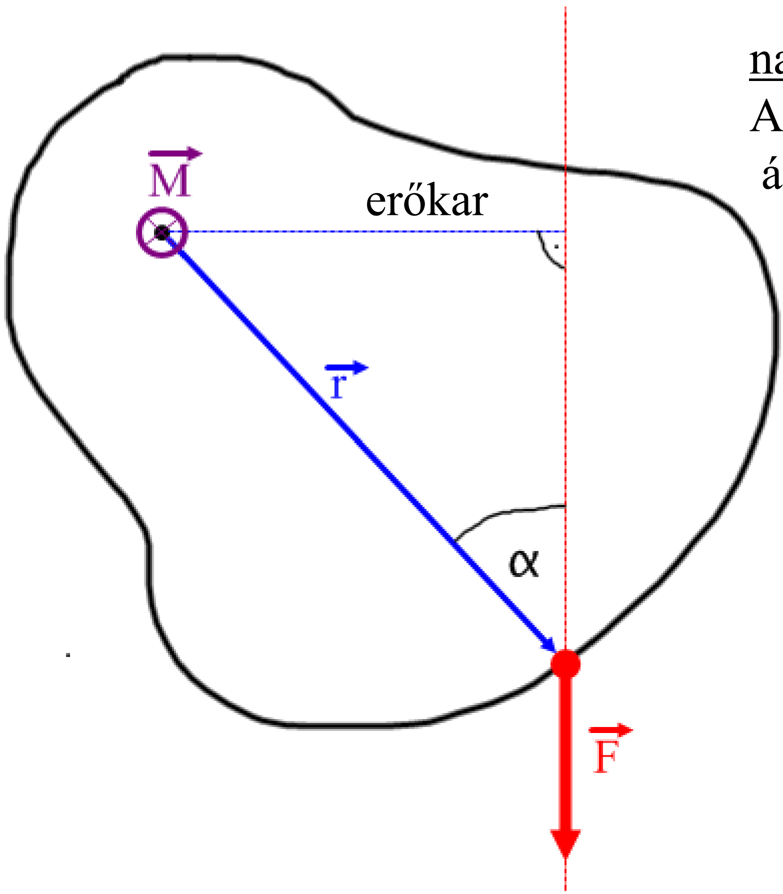
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



<u>nagysága:</u> erő × erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr\sin\alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

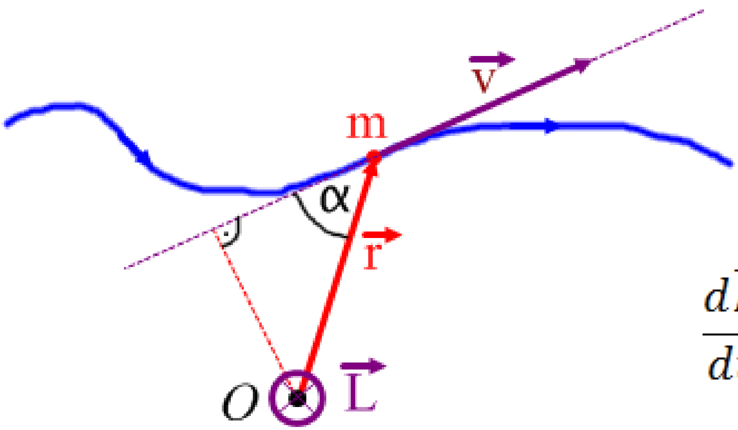
<u>iránya:</u> a vektorszorzat alapján (jobbkéz-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e$$

Perdülettétel:

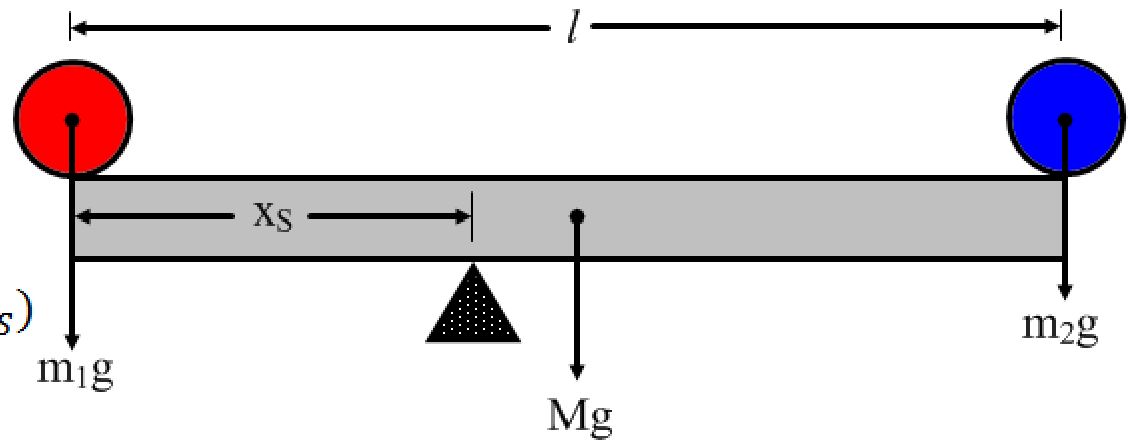
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

Kiterjedt testek, tömegpontrendszerek

Súlypont *

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

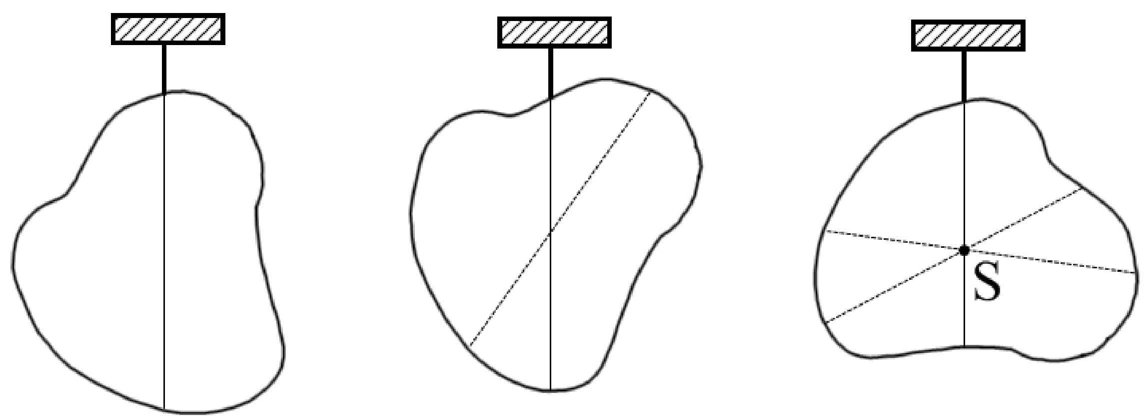


Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. <u>**Például:**</u>

$$m_1 g x_S = Mg\left(\frac{l}{2} - x_S\right) + m_2 g(l - x_S)$$

$$x_S = \frac{Mg\left(\frac{l}{2}\right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:

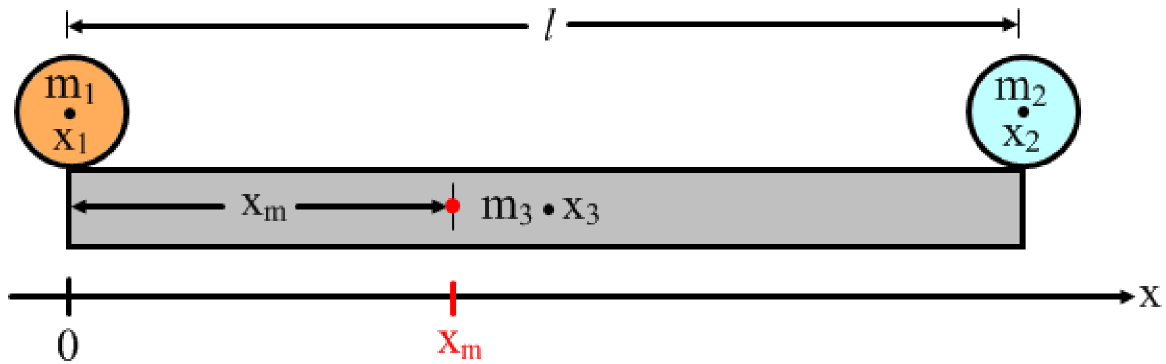


Tömegközéppont *

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A **példában** az összetett test tömegközéppontjának *x* koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$



A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{m} \right)$$

tehát: $\boxed{\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i}{m}}$

ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.

Lendülettétel tömegpontrendszerre

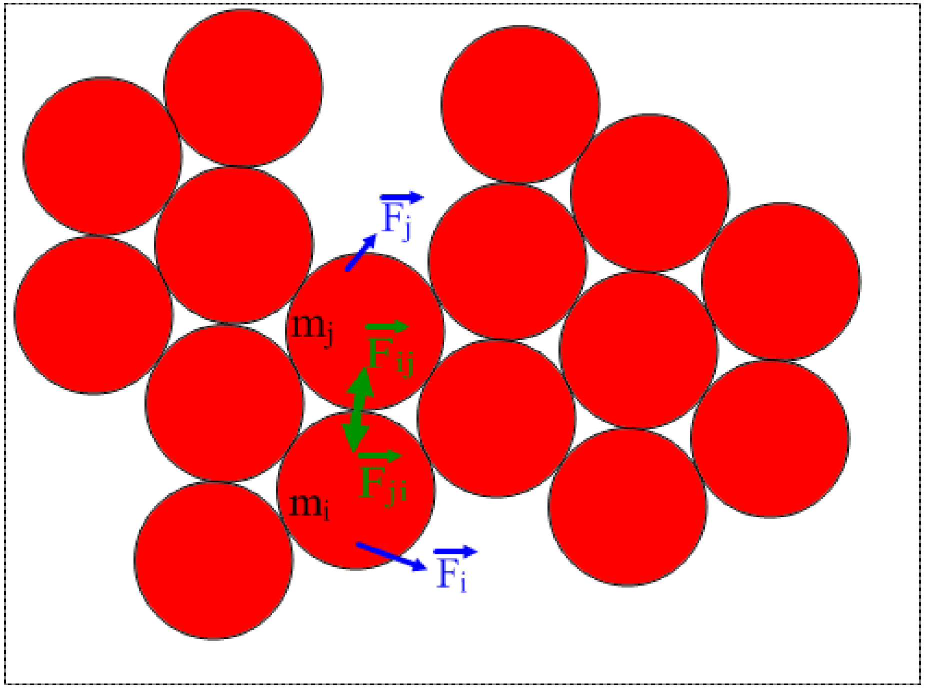
Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (*i*):

A rá ható külső erők eredője: $\vec{F}_i$

A *j*-edik pont által kifejtett erő: $\vec{F}_{ji}$

A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (*i*-edik) tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$



Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Lendülettétel tömegpontrendszerre: $$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}$$

Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.
A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \cdots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \cdots$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} + m_C \vec{v}_{C1} + \cdots = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} + m_C \vec{v}_{C2} + \cdots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület x, y és z komponenseire.
Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális
(pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)
Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.
Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.
Extrém esetek:
Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2} = v_{B2}$ és $m = m_A + m_B$
Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2} m_A {v_{A1}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{B1}}^2 = \frac{1}{2} m_A {v_{A2}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{B2}}^2$$

Merev testek egyensúlya

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

Egy merev test egyensúlyának feltételei:
- a testre ható külső erők eredője nulla **és**
- a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.

Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás *

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuum**ról beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

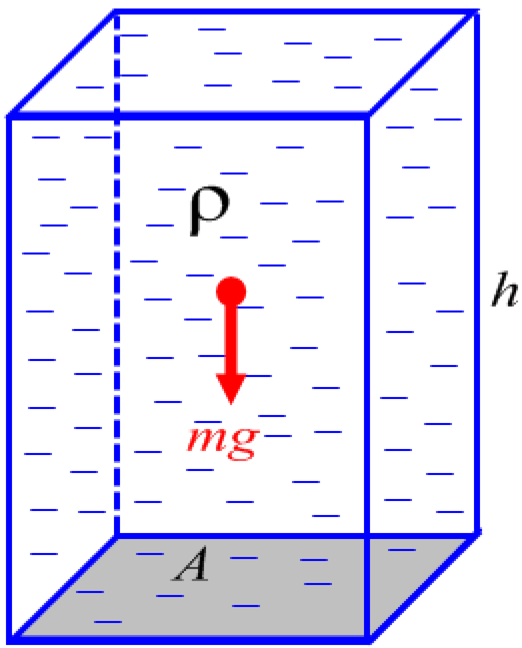
$$p = \lim_{A\to 0} \frac{F_\perp(A)}{A}$$

Mértékegysége: $[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal)

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (*h* magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_\perp(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g$$

ρ: sűrűség



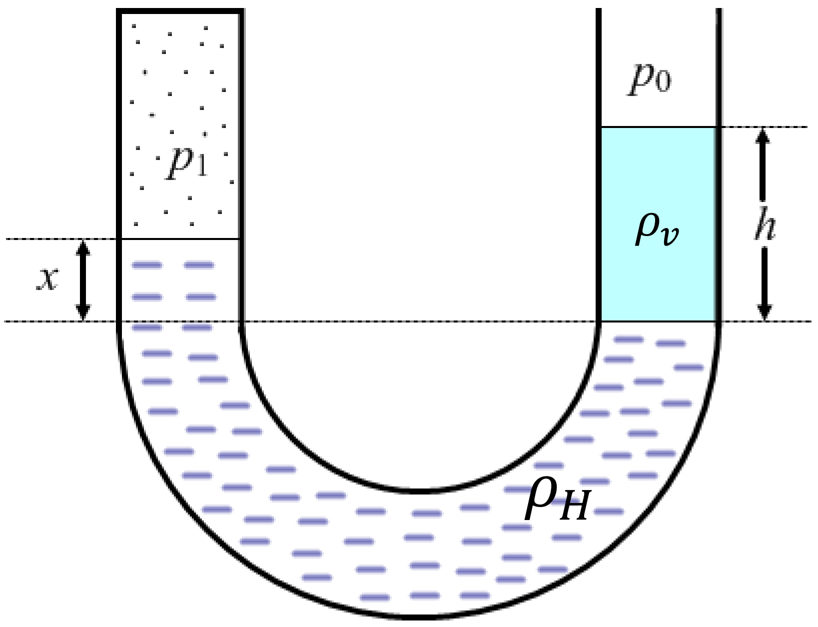
Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.

Pascal törvénye – Példa *

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul 13,6g/cm^3 sűrűségű higany, a jobb szárban efölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar, a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása 0,9bar. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

$p_0 = 10^5$Pa, $p_1 = 0{,}9 \cdot 10^5$Pa, $h = 50$cm



A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

$$p_b = p_j$$

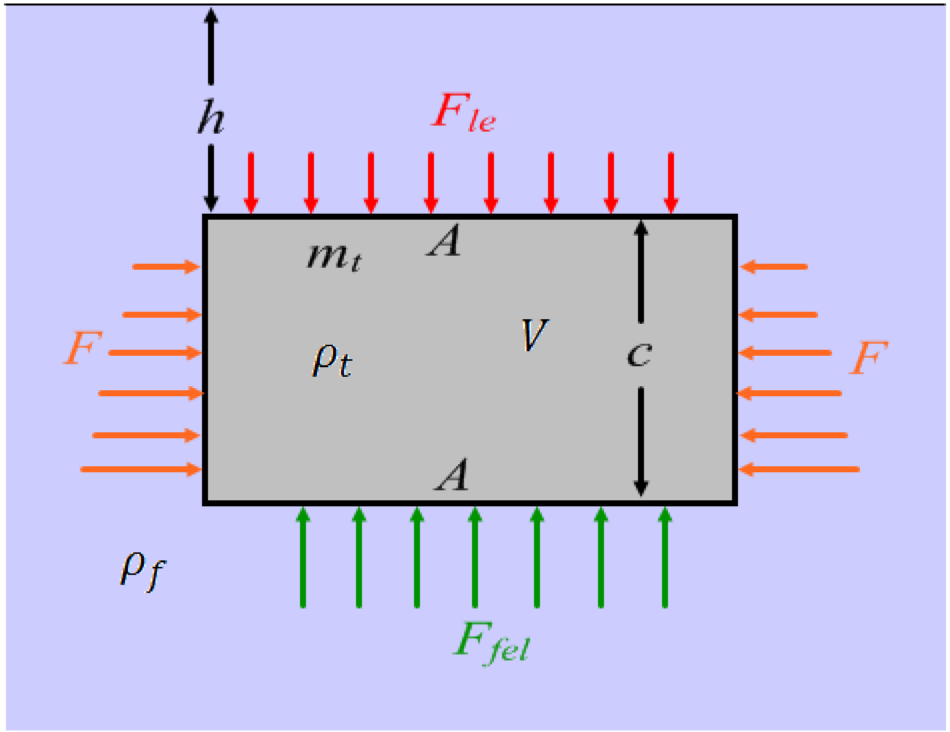
$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \cdots = 11{,}17\text{cm}$$

Felhajtó erő *

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.
A téglatest alakú test lapjaira:
- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...

$$F_f = F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A =$$
$$= \rho_f g(h + c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA =$$
$$= \rho_f Vg = m_f g$$



V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f
Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédesz törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Példa: 7

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.

Termodinamika
(Hőtan)

Termodinamika

A **hőtan** nagyszámú részecskéből (pl. gázmolekulából) álló makroszkópikus rendszerekkel foglalkozik. A nagy számok miatt érdemes a **mólt** bevezetni, ami egy **Avogadro-számnyi** ($6{,}022 \cdot 10^{23}$ db) részecskét jelent (12-es tömegszámú szénatomok száma 12 gramm szénben).
Ennek megfelelően az atomi tömegegység a 12-es tömegszámú szénatom tömegének 1/12-ed része: 1 ATE = $1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg

A végbemenő folyamatok **kvázisztatikusak**, a rendszert leíró mennyiségek a folyamat során minden pillanatban ki vannak egyenlítődve (egyensúlyi állapotokon keresztüli „lassú" változás).

A rendszert leíró makroszkópikusan mérhető mennyiségek az **állapothatározók**.

Extenzív állapothatározók: a rendszer egészére jellemzők, és több rendszer egyesítésekor ezek összeadódnak (pl. térfogat, részecskeszám, tömeg, energia).

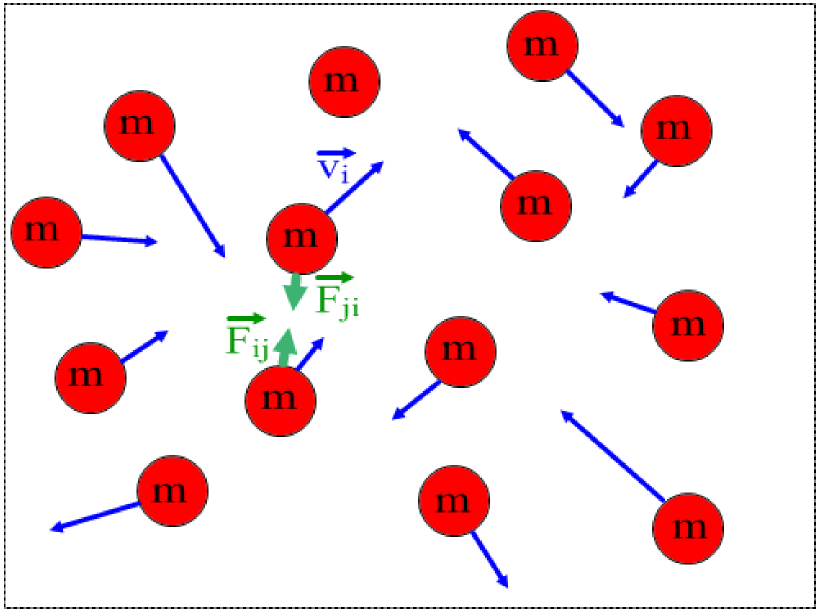
Intenzív állapothatározók: pontról pontra mérhetők, több rendszer egyesítésekor ezek kiegyenlítődésre törekednek (pl. nyomás, hőmérséklet, sűrűség, energiasűrűség).

Fenomenologikus elmélet: leírás csak az állapothatározókon keresztül.
Statisztikus elmélet: a nagyszámú részecskére statisztikai törvényszerűségek alkalmazása.

Belső energia

A rendszer **belső energiája** a részecskék egymáshoz (rendszer tömegközéppontjához) képesti rendezetlen mozgásából származó **kinetikus energia** és a részecskék közötti Van der Waals kölcsönhatáshoz tartozó **potenciális energia**.

N db részecskére: $E_b = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E_{Pij}$



Brown-mozgás: A kálium-permanganát ($KMnO_4$) oldódása vízben azt mutatja, hogy a víz részecskéi nagysebességgel ütköznek a festék rögöcskékkel. A részecskéknek tehát sebességük, és így mozgási energiájuk van. Mivel számuk igen nagy, ez az energia jelentős.

Bizonyos esetekben a részecskék közötti kölcsönhatások (rugalmas ütközéseket leszámítva) elhanyagolhatók (ideális gázok), ekkor a második tag nulla.

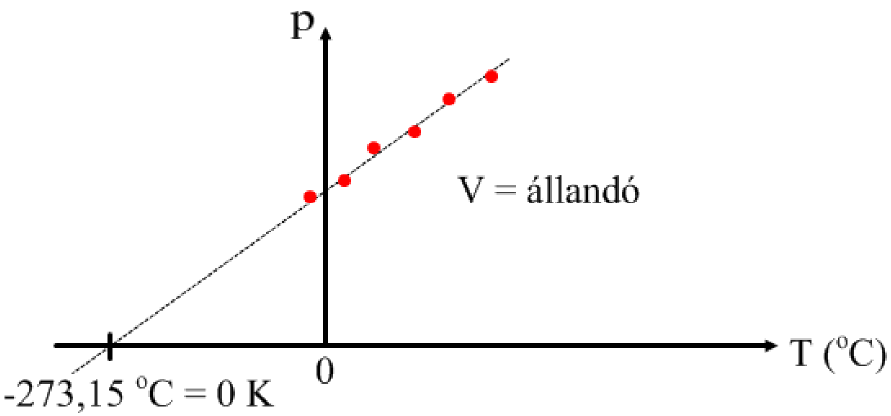
Magasabb hőmérsékleten a mozgás intenzívebb, így a belső energia nagyobb.

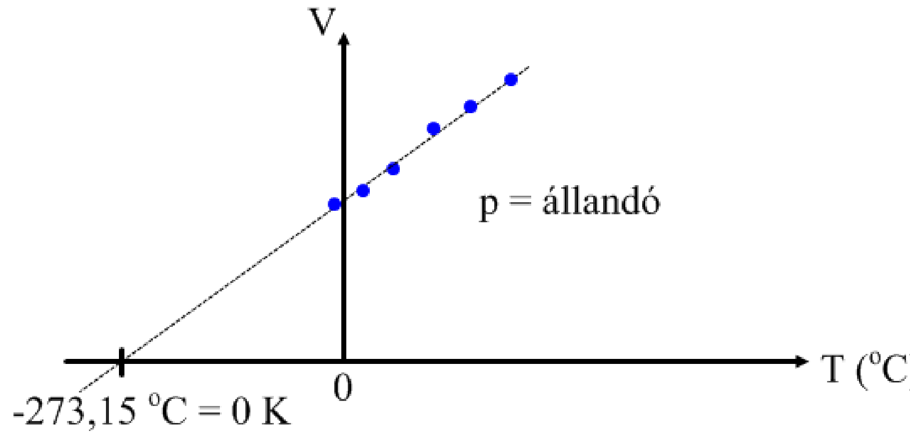
Rendezett mozgás mechanikai energiája disszipáció során (pl. súrlódás, közegellenállás) belső energiává alakulhat, növelve a test hőmérsékletét

Abszolút hőmérsékleti skála

Ideális gáz térfogatát tanulmányozva állandó nyomáson, vagy nyomását tanulmányozva állandó térfogaton, mindkét esetben a hőmérsékletnek lineáris függvénye az eredmény.

A gáz térfogata illetve nyomása lineárisan nullához tart csökkenő hőmérséklet esetén.





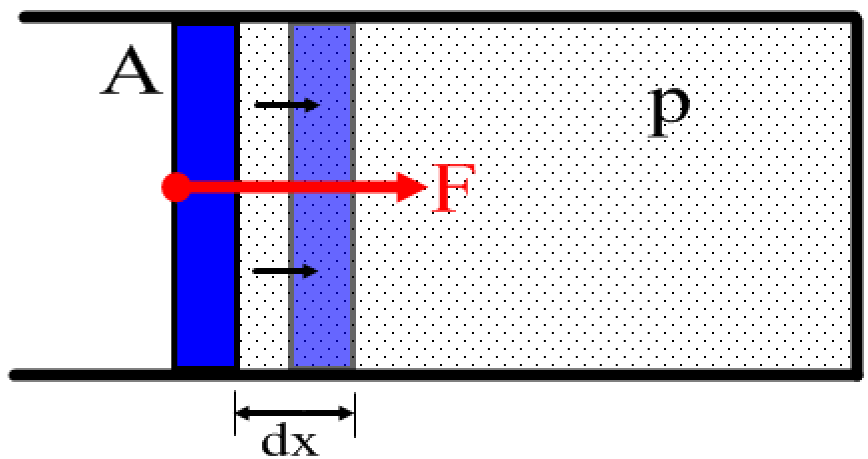
Abszolút nulla: ahol a lineáris extrapoláció egyenese metszi a hőmérséklet tengelyt.

T = -273,15 °C = 0 K   (Kelvin) - A hőmérséklet SI mértékegysége.

Az olvadó jég hőmérséklete (0 °C): 273 K (kerekítve)
A forrásban lévő víz hőmérséklete (100 °C): 373 K (kerekítve)
A különbség tehát kelvinben is ugyanannyi, mint Celsius fokokban!

Térfogati munka

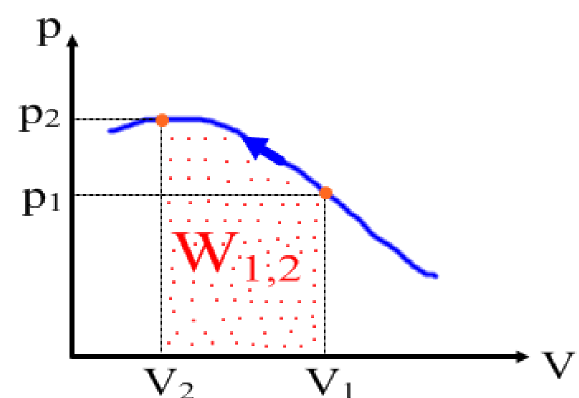
A **térfogati munka** a környezet által a gázon (rendszeren) végzett munka, miközben annak térfogata változik.
Egy könnyen mozgó dugattyún végzett elemi munka a környezet által, miközben azt dx távolsággal beljebb nyomja: δW



A szükséges erő p nyomású gáz esetén: $F = pA$.

Tehát az elemi munkára: $\delta W = pAdx$
Mivel $Adx = -dV$

$$\boxed{\delta W = -pdV}$$



Eközben a gáz által végzett munka negatív, mert a gáz kifelé nyomja a dugattyút (az erő ellentétes az elmozdulás irányával): $\delta W_g = -\delta W$
Tágulás esetén viszont: $\delta W < 0$ és $\delta W_g > 0$
Egy véges térfogatváltozás esetén a nyomás általában változik, ezért integrálni kell: $W_{1,2} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV$
A munkát a p-V diagramon a görbe alatti terület reprezentálja.

ha a nyomás állandó:
$W_{1,2} = -p(V_2 - V_1)$

Hőközlés

A test belső energiája úgy is nőhet, ha egy magasabb hőmérsékletű test energiát ad neki. Ez a makroszkopikus mozgás (munkavégzés) nélkül átadott energia a **hő**.
<u>Jele</u>: Q (az energia amit a rendszer a környezettől kap). <u>Mértékegysége</u>: J (Joule)
A rendszer (test, folyadék, gáz) által a környezetnek leadott energia pedig: $Q_{le} = -Q$

<u>Hőközlés fajtái:</u>
- **hővezetés** (a test anyagában vagy testek között érintkezés útján - pl. főzőlap)
- **konvekció** (a közeg áramlik és ezáltal az energiát is viszi magával - pl. központi fűtés)
- **hősugárzás** (mindenféle közeg nélkül, elektromágneses hullám formájában – pl. Nap)

Hőkapacitás: A rendszer hőmérsékletének 1 fokkal emeléséhez szükséges hő:

$Q = C \cdot \Delta T$ Mértékegysége: $[C]$ = J/K vagy J/°C

A hőkapacitás a rendszer egészét jellemzi, az anyagi minőségtől és mennyiségtől is függ.

Fajhő: a rendszer egységnyi tömegű részének hőkapacitása:

$C = c \cdot m$ vagyis $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ Mértékegysége: $[c]$ = J/(kg·K) vagy J/(kg·°C)

Mólhő: a rendszer egy mólnyi részének hőkapacitása:

$C = c_M \cdot n$ ahol n a mólok száma vagyis $Q = c_M \cdot n \cdot \Delta T$

Mértékegysége: $[c_M]$ = J/(mol·K) vagy J/(mol·°C)

A fajhő és mólhő már csak az anyagi minőségtől függő mennyiségek!

A belső energia a rendszer egy állapotát jellemzi, míg a munka és a hő egy folyamatot.

A hőtan első főtétele

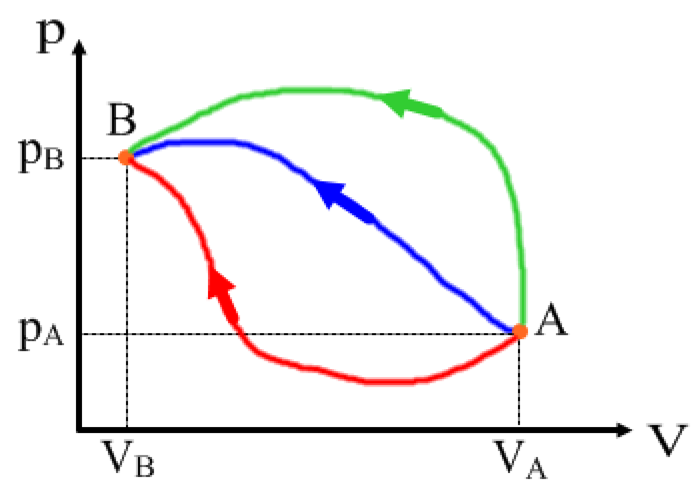
A **hőtan első főtétele** kimondja, hogy egy rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a **rendszerrel közölt hő** és a **rendszeren végzett munka** összegével:

$$\boxed{\Delta E_b = Q + W}$$

A munka a környezet által végzett térfogati munka.
A hő a környezettől kapott hő (lehet például súrlódás által disszipált mechanikai energia).

Mivel a belső energia a rendszer állapotára jellemző mennyiség, annak megváltozása egy *A* és *B* állapotok között nem függ attól, hogy milyen folyamat során történt a változás:

$$\Delta E_b = E_b(B) - E_b(A)$$



Bármilyen körfolyamat (*A*-ból kezdve és *A*-ban végződve) során természetesen:

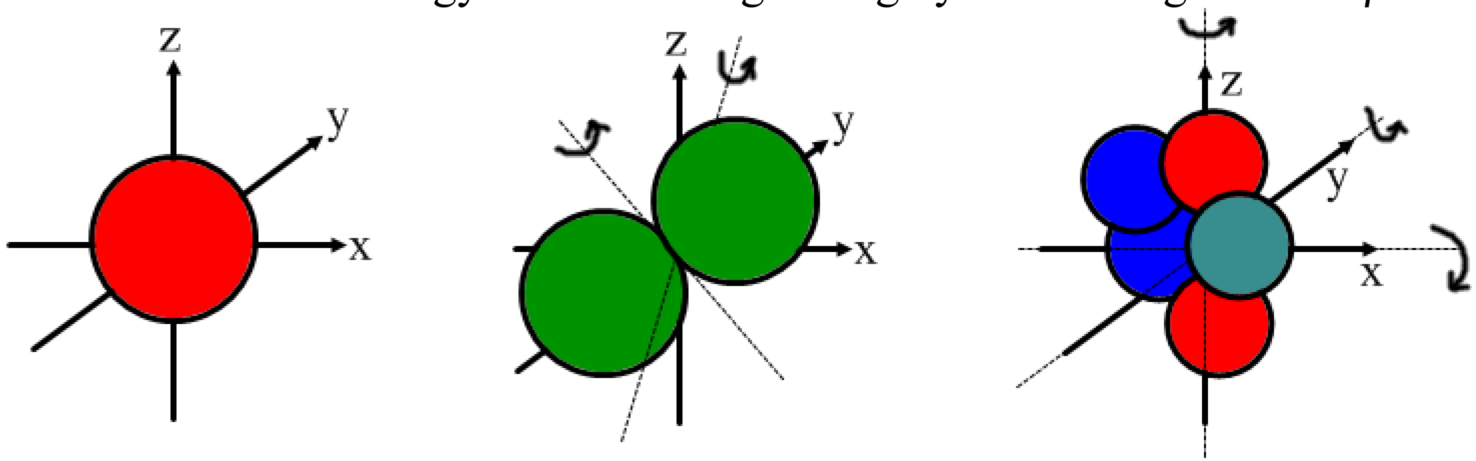
$$\Delta E_b = E_b(A) - E_b(A) = 0$$

A tétel differenciális alakja: $dE_b = \delta Q + \delta W$

Ekvipartíció tétele

Kinetikus gázelmélet: Az ideális gáz nagyszámú, kisméretű részecskéből áll, amelyek időnként egymással és az edény falával rugalmasan ütköznek, de ezt leszámítva más kölcsönhatás nem lép fel közöttük. A részecskék mérete elhanyagolható a rendelkezésre álló térfogathoz képest.

Szabadsági fokok száma: (f) – Az egymástól független energiatárolási módok.
pl. mozgás x irányban, y irányban, z irányban (egyatomos gáz esetén) – $f = 3$ (1 részecskére!)
kétatomos molekulák a hossztengelyükre merőleges két tengely körül foroghatnak is – $f = 5$
sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak – $f = 6$



Ekvipartíció tétele: Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó ε_f energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára: $\boxed{\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT}$ $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmann-állandó)

Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$, akkor egy részecskére átlagban

$\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT$ energia jut.

Ha a rendszer *N* db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az *N*-szerese:

$$\boxed{E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT}$$ ahol $n = N / N_A$ és $R = kN_A$

n: a mólok száma N_A: az Avogadro-szám $R = 8{,}31$ J/(mol·K) az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát: $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

Egyatomos gáz esetén a 3 független energia tag: $\frac{1}{2}m{v_x}^2,\ \frac{1}{2}m{v_y}^2,\ \frac{1}{2}m{v_z}^2$

Ideális gázok állapotegyenlete

<u>Állapotegyenlet</u>: Ideális gáz minden állapotában, az állapothatározók között érvényes a következő összefüggés:

$$\boxed{pV = NkT} \quad \text{vagy} \quad \boxed{pV = nRT}$$

Ennek felhasználásával a belső energia: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó (N = állandó, vagy n = állandó), az állapot-egyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

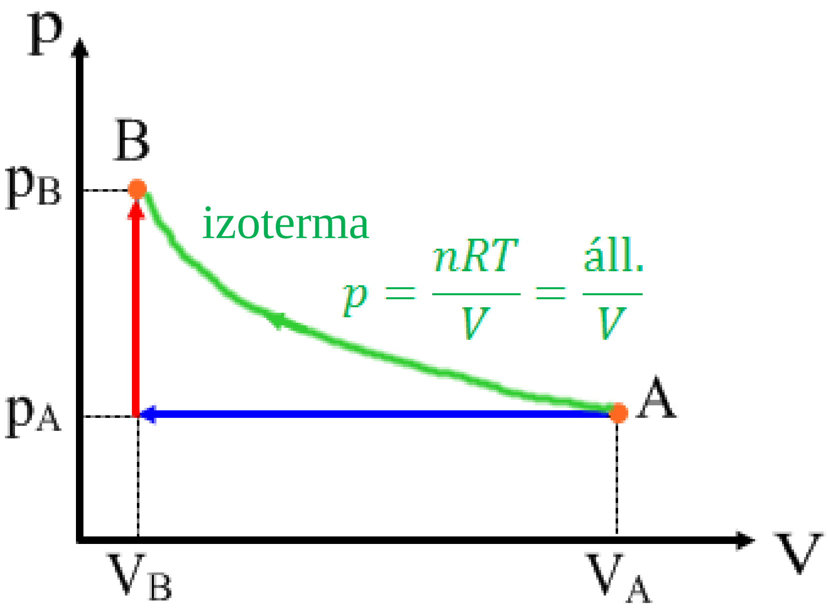
$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}$$

Ideális gázok speciális állapotváltozásai

Gáz mennyisége mindig adott, tehát n = áll!

- <u>izobár</u>: a nyomás is állandó ($\underline{p}V = \underline{nR}T$)
  (V/T = áll. $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$)

- <u>izochor</u>: a térfogat is állandó ($p\underline{V} = \underline{nR}T$)
  (p/T = áll. $W = 0$)



- <u>izoterm</u>: a hőmérséklet is állandó ($pV = \underline{nRT}$)
  (pV = áll.)

$$\delta W = -pdV$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = -nRT[\ln V]_{V_1}^{V_2} =$$

$$= -nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = p_1V_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

- <u>adiabatikus</u>: a közölt hő nulla $Q = 0$ (*később…*)

Példa: 9

Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén (V = állandó, így W = 0):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \qquad \Delta E_b = \frac{f}{2} nR\Delta T = Q$$

izochor mólhő: $c_{MV} = \frac{f}{2} R$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} nR\Delta T = Q + W = Q - p\Delta V = Q - nR\Delta T$$

$$\frac{f}{2} nR\Delta T + nR\Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \qquad Q = \left(\frac{f}{2} + 1\right) nR\Delta T$$

izobár mólhő: $c_{Mp} = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \qquad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla: $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása: $dE_b = \delta W \quad \rightarrow \quad \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel: $nRT = pV \quad \rightarrow \quad nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2}(pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + pdV = -\frac{f}{2} Vdp$$

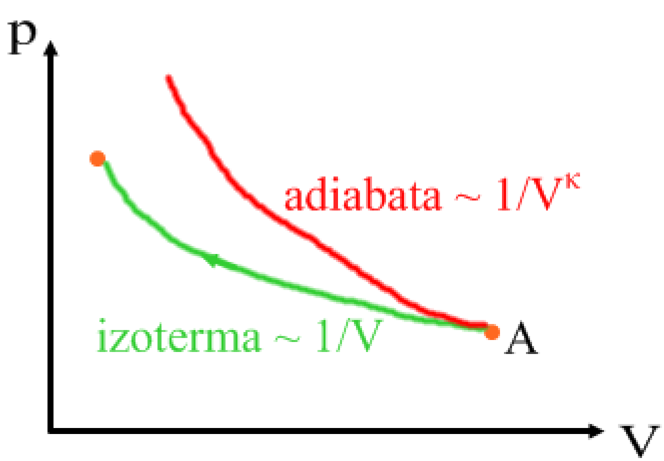
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right)\frac{dV}{V} = -\frac{f}{2}\frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \quad \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} = \frac{p_1}{p_2}$$



<u>Első Poisson-egyenlet</u>: $\boxed{p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}}$

Körfolyamatok

A körfolyamatok közös tulajdonsága, hogy bármennyi és bármilyen részfolyamatokból is álljanak, a ciklus végén a rendszer (gáz, munkaközeg) visszakerül a kiindulási állapotba. Mivel a belső energia (E_b) és az entrópia (S) mennyiségeket a rendszer állapota határozza meg, azok értéke a ciklus végén szintén ugyanannyi lesz, mint az elején.
Ebből az következik, hogy a teljes ciklusra a belső energia változása és az entrópia változása zérus. A részfolyamatokban ezek a mennyiségek úgy változnak meg, hogy a teljes ciklusra a változások összege nullának adódik:

$$\Delta E_{bO} = \Delta E_{b1} + \Delta E_{b2} + \cdots + \Delta E_{bn} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta S_O = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_n = 0$$

Az O karakter az alsó indexben ΔE_{bO} és ΔS_O esetén a teljes körfolyamatra (ciklusra) vett értéket jelöli.

A **hőtan első főtételét** minden részfolyamatra felírhatjuk, tehát ezen egyenleteket összeadva a teljes ciklusra is nyugodtan írhatjuk, hogy

$$0 = \Delta E_{bO} = Q_O + W_O \quad \rightarrow \quad Q_O = -W_O$$

Itt a Q_O mennyiség a rendszer (gáz, munkaközeg) által **kapott nettó hő** a ciklus során:

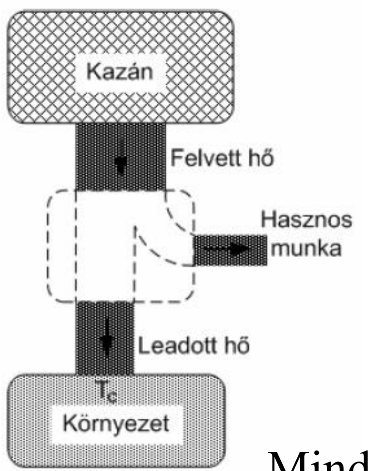
$$Q_O = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$

A W_O mennyiség pedig a **rendszeren végzett nettó munka** a ciklus során:

$$W_O = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

A **gáz által** a ciklus során **leadott** hőre természetesen: $Q_{leO} = -Q_O$
A **gáz által** a ciklus során **végzett** munkára pedig: $W_{gO} = -W_O$

Hőerőgép



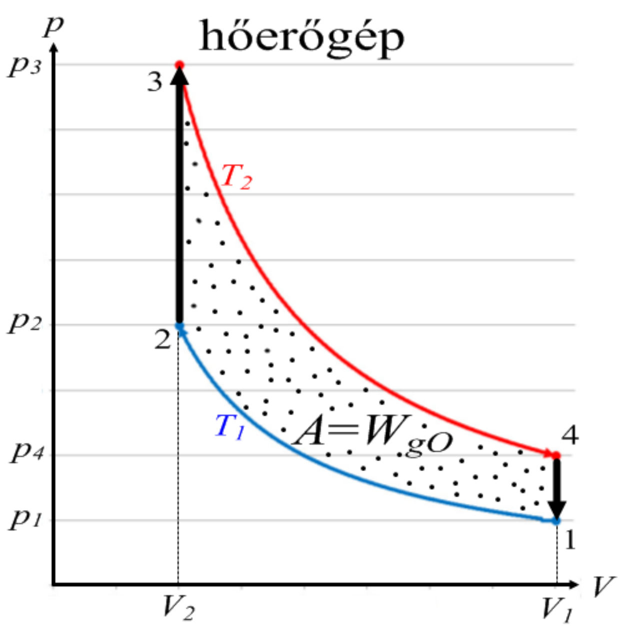
A hőtan I. főtételéből továbbra is: $0 = \Delta E_{bO} \rightarrow Q_O = -W_O = W_{gO}$
Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően,
a munkaközeg a kazántól (meleg hőtartálytól) felvett hő és a környezetnek (vagy hideg hőtartálynak) leadott hő különbségeként adódó nettő felvett hőnek megfelelő hasznos munkát végez minden ciklus alatt (lásd ábra):

$$W_{gO} = W_{hasz} = Q_{felv} - Q_{lead} = Q_O$$

Mind a meleg, mind a hideg hőtartály hőkapacitását végtelennek tekintjük, tehát azok hőmérséklete végig állandó.
Tehát a hőerőgép a felvett hőt alakítja mechanikai munkavégzéssé, valamilyen η hatásfokkal:

$$\eta = \frac{W_{hasz}}{Q_{felv}} = \frac{Q_{felv} - Q_{lead}}{Q_{felv}} = 1 - \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}}$$

Példa: 10



Ezen az egyszerű példán egy T_1 hőmérsékleten végzett izoterm kompresszió, egy V_2 térfogaton végzett izochor melegítés, egy T_2 hőmérsékleten zajló izoterm expanzió, és egy V_1 térfogaton történő izochor hűlés alkotja a ciklust.
Látható, hogy a hasznos munka két részből tevődik össze:

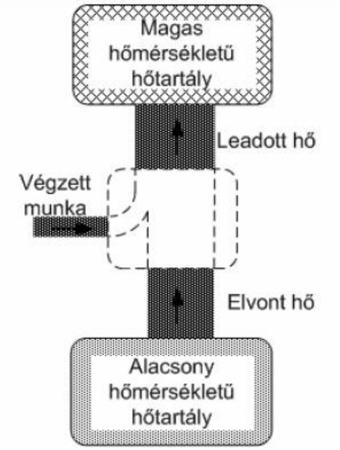
$$W_{hasz} = W_{g12} + W_{g34}$$

Az első tag negatív, abszolút értéke pedig az 1-es izoterma alatti terület. A második tag pozitív, értéke a 2-es izoterma alatti terület. Tehát a **bezárt terület** megadja a hasznos munkát. Ez tetszőleges hőerőgép körfolyamatára igaz, nem csak itt!

Hűtőgépek, hőszivattyúk *

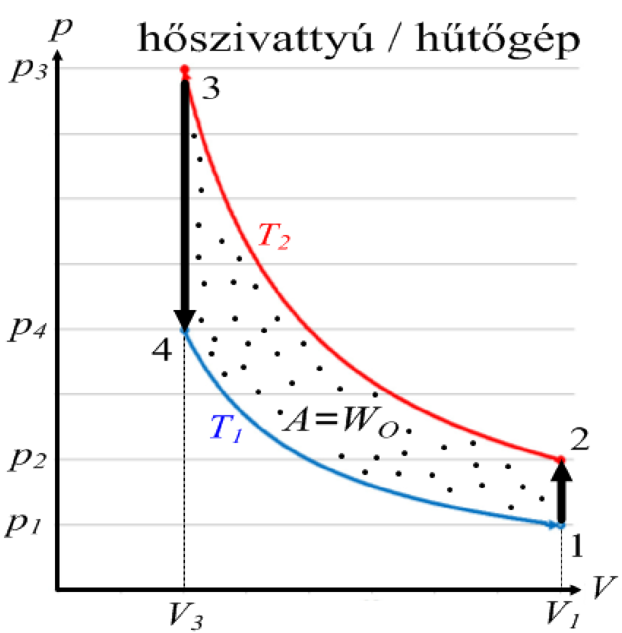
A hőtan I. főtételéből itt is: $0 = \Delta E_{bO} \;\rightarrow\; Q_O = -W_O \;\rightarrow\; Q_{leO} = W_O$

Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően, a munkaközeg a hideg hőtartálytól hőt von el és azt, valamint a motor által a ciklus közben rajta végzett nettó munkából származó energiát hő formájában leadja a meleg hőtartálynak minden ciklus alatt (lásd ábra):



$$Q_{lead} = Q_{elv} + W_O \qquad \text{ahol a nettó leadott hő:} \quad Q_{leO} = Q_{lead} - Q_{elv}$$

A meleg és hideg hőtartály hőkapacitását itt is végtelennek tekintjük.
A hűtőgép és hőszivattyú működési elve ugyanaz, de a feladatuk különböző.
A hűtőgépnél a kívánatos folyamat a hő elvonása a hideg tartálytól (hűtő).
A hőszivattyúnál a kívánatos folyamat a hő leadása a meleg hőtartálynak (pl. fűtendő szoba).



Itt hatásfok helyett jósági tényezőket tudunk definiálni.

Hűtőgép: $$q_{hg} = \frac{Q_{elv}}{W_O} = \frac{Q_{elv}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

Hőszivattyú: $$q_{hsz} = \frac{Q_{lead}}{W_O} = \frac{Q_{lead}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

A körfolyamat állapotai ugyanazok, mint az előző dián a hőerőgépnél, de **fordított** irányban megyünk végig rajtuk. Ezért a motor által végzendő nettó munka lesz pozitív, és ez fog most megegyezni a görbe által bezárt területtel:

$$W_{motor} = W_O = W_{23} + W_{41} \qquad W_{23} > 0 \qquad W_{41} < 0$$

A hőtan második főtétele

Vannak olyan folyamatok amik nem megfordíthatók, **irreverzibilisek**.
példák:
- hővé alakult mozgási energia nem alakul vissza
- összetört pohár nem pattan épségben vissza
- üres részhez nyitott gáz molekulái nem fognak mind visszajönni az eredeti kamrába

Ezeket a folyamatokat a fizika törvényei nem tiltják, viszont elenyésző a valószínűségük. Ezért statisztikailag kimondható, hogy a folyamatok csak olyan irányba mehetnek végbe, amivel **a rendezetlenség nő**. A rendezetlenség mértéke az **entrópia**. Lokálisan csökkenthető az entrópia, de csak annak árán, ha máshol viszont nő. A világegyetem entrópiája tehát folyamatosan nő.

Hőtan második főtétele: nem lehet olyan gépet készíteni, amely egyetlen tartály lehűlése árán munkát végezne (kell egy hideg tartály is). Ez a **másodfajú örökmozgó**.

Másik megfogalmazás: Zárt rendszer entrópiája sohasem csökkenhet. $\boxed{\Delta S \geq 0}$

Megfordítható folyamatok esetén a rendezetlenség változatlan.
pl. rugalmas ütközés, adiabatikus állapotváltozás