

KOVÁCS ENDRE, PARIPÁS BÉLA,

FIZIKA I.

7

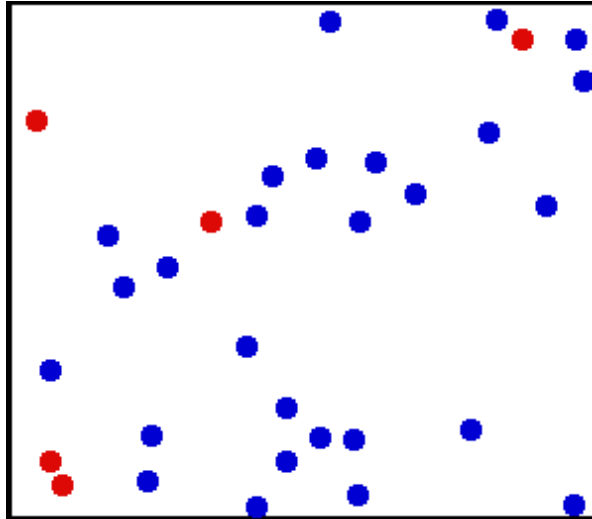


A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

VII. KINETIKUS GÁZELMÉLET ÉS IDEÁLIS GÁZOK

1. BEVEZETÉS

Az eddig elmondottak szilárd anyagokra és folyadékokra is érvényesek. Ezután inkább gázokkal foglalkozunk. A kinetikus gázelméletben feltesszük, hogy a gáz nagyszámú, kisméretű, pontszerű "golyókból" áll, amelyek időnként ütköznek egymással és az edény falával, de ezen kívül nem hatnak egymással kölcsön (mintha rugalmas gömbök lennének).



Ideális gáz szilárd falú tartályban – elméleti modell [1]

2. EKVIPARTÍCIÓ ÉS SZABADSÁGI FOKOK

Szabadsági fok: f

Szabadsági foknak (jelölése: f) az egymástól független energiatárolási lehetőségeket nevezzük.



Ludwig Boltzmann
(1844–1906) osztrák
fizikus. [ii]

Az **ekvipartíció tétele** kimondja, hogy egyensúlyi rendszerben adott hőmérsékleten minden egyes szóba jöhető szabadsági fokra időátlagban ugyanannyi energia jut:

$$E = \frac{1}{2} kT$$

Boltzmann állandó: k ,
értéke:

$$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

ahol k a **Boltzmann állandó** ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$). Hangsúlyozzuk, hogy ez az $\frac{1}{2} kT$ energia nem az egész rendszer energiája, hanem egy részecske egy szabadsági fokára jutó energia. Ha az adott részecskének f szabadsági foka van, akkor energiája átlagosan $\frac{f}{2} kT$. Ha a rendszer azonos részecskékből áll, akkor ezt N -nel (a részecskék számával) szorozva kapjuk a rendszer belső energiáját:

$$E_{\delta} = \frac{f}{2} NkT$$

Ebből következik, hogy állandó részecskeszám esetén a rendszer belső energiájának a megváltozását a

$$\Delta E_{\delta} = \frac{f}{2} Nk\Delta T$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

Fentiek szerint tehát a gáz **belső energiája** csak a **hőmérséklettől** függ. Ez akár a **hőmérséklet** definíciója is lehet: két test közül az a magasabb hőmérsékletű, amelyiknek átlagosan több energia jut egy szabadsági fokára. Ha a két testet érintkezésbe hozzuk, az együttes testre is érvényes lesz az ekvipartíció tétele, az energia egyenlően fog eloszlani a szabadsági fokok között, így a melegebből a hidegebbre energia (hő) megy át. A helyzetet bonyolítja, hogy a szabadsági fokok száma általában a hőmérséklettől is függ (kis mértékben), T növelésével új szabadsági fokok "olvadhatnak ki", ettől azonban sokszor eltekintünk.

Egyatomos gáznál $f = 3$, mivel három dimenzióban három független irányban mozoghat az atom, vagyis a három független energia tag:

$$\frac{1}{2}mv_x^2, \frac{1}{2}mv_y^2 \text{ és } \frac{1}{2}mv_z^2$$

Egy olyan molekula, amelyik két atomból áll, nemcsak halad, hanem forgó mozgást is végezhet a két atomot összekötő szakaszra merőleges két tengely körül, ezekhez $\frac{1}{2}I\omega^2$ kinetikus energia tartozik. A két atom az

összekötő szakasz mentén harmonikus rezgést is végezhet, amelyhez nemcsak kinetikus, hanem potenciális energia is tartozik, ez a szabadsági fok azonban inkább csak magasabb hőmérsékleten aktiválódik. Tehát kétatomos gáznál $f = 5$ (alacsonyabb hőmérsékleten) vagy $f = 7$ (magasabb hőmérsékleten). Három (vagy több) atomos molekula - ha az atomok nem esnek egy egyenesbe - már három, egymásra merőleges tengely körül foroghat, ekkor $f = 6$. Ha egy egyenesbe esnek, akkor $f = 5$, ha a rezgési szabadsági fokokat is figyelembe vesszük, akkor viszont ezeknél nagyobb számokat kapunk a szabadsági fokokra, az anyagtól és hőmérséklettől függően.

A szilárd testeket alkotó atomok többnyire az egyensúlyi helyzetük körül rezgő mozgást végeznek a három független, egymásra merőleges irányban (x, y, és z). Ez három kinetikus és három potenciális energia-tagot jelenthet, tehát egy atomhoz hat szabadsági fok tartozik. A szilárd test belső energiája tehát

$$E_{\delta} = 3NkT = 3nRT$$

Szilárd test mólhő: $3R$

Ebből következik az ún. **Dulong-Petit szabály**: a szilárd test mólhője $3R$.

Megjegyezzük, hogy az ekvipartíció tétele az alacsonyabb hőmérsékletek felé haladva (kvantummechanikai hatások miatt) egyre kevésbé alkalmazható. Például a Dulong-Petit szabály alól már szobahőmérsékleten is vannak kivételek (pl. gyémánt). Ezzel részletesebben a következő félévben foglalkozunk.

3. IDEÁLIS GÁZOK

A tapasztalat szerint a gáz melegítésekor nő a térfogata és/vagy nyomása. **Ideális gáznak** nevezzünk a gázt, ha érvényes rá a következő **állapotegyenlet**:

$$pV = NkT \text{ azaz } pV = nRT$$

Mólszám: n

Egyetemes gázállandó:
 R , értéke: 8,31 J/K

ahol n a mólszám, R az egyetemes gázállandó (8,31 J/K). Ekkor a belső energiát kiszámolhatjuk a következőképpen:

$$E_{\delta} = \frac{f}{2} pV$$

Hangsúlyozzuk, hogy a fenti összefüggések a valóságban létező gázokra csak közelítőleg érvényesek. Az ideális-gáz közelítés annál érvényesebb, minél kisebb a gáz sűrűsége és minél távolabb vagyunk annak forrásponjtjától.

4. IDEÁLIS GÁZ SPECIÁLIS ÁLLAPOTVÁLTOZÁSAI

Általában, ha a részecskék száma nem változik, a $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ egyenletet használhatjuk. Ezt egyesített gáztörvénynek is hívják és könnyen levezethető az állapotegyenletből is. Egyszerűbben tárgyalhatók azok az esetek, amelyekben ebből a három állapothatározóból egy állandó értékű, ennek megfelelően beszélhetünk **izobár**, **izochor** és **izoterm** állapotváltozásról.

IZOBÁR ÁLLAPOTVÁLTOZÁS

Izobár állapotváltozás során a gáz nyomása állandó (p =állandó). Ha az egyesített gáztörvényben egyszerűsítünk a nyomással, kapjuk, hogy

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

A gáz által végzett **térfogati munka**

$$W^* = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

de $pV_i = nRT_i$, így

$$W^* = nR(T_2 - T_1) = nR\Delta T.$$

A gáz **belső energiájának** megváltozása $\Delta E_b = \frac{f}{2} nR\Delta T$, így a gázzal **közölt hő** a **hőtan első**

főtételének felhasználásával $Q = \left(\frac{f}{2} + 1\right) nR\Delta T$. Ahhoz, hogy $n = 1$ mól gáz hőmérsékletét 1 fokkal megemeljük, $(f/2 + 1)R$ hő kell, vagyis az izobár **mólhő** $(f/2 + 1)R$.

IZOCHOR ÁLLAPOTVÁLTOZÁS

A V térfogat állandó, tehát

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

A gáz által végzett munka nulla, vagyis a gáz belső energiájának megváltozása egyenlő a gázzal közölt hővel:

$$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} nR\Delta T = \frac{f}{2} (p_2 - p_1)V = \frac{f}{2} V\Delta p$$

Ebből az izochor (állandó térfogaton mért) mólhő $f/2 \cdot R$. Az állandó nyomáson és az állandó térfogaton mért mólhő különbsége láthatóan R . A két mólhő hányadosa

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{f/2+1}{f/2} = \frac{f+2}{f} = \kappa$$

(ejtsd: *kappa*), ezt **adiabatikus kitevőnek** is nevezik. Látható, hogy azért kell több hőt közölni a gázzal ugyanakkora hőmérsékletnövekedéshez állandó nyomáson, mert a gáz tágulása során térfogati munkát végez, amivel energiát ad le. Ez állandó térfogaton definíció szerint ki van zárva.

IZOTERM ÁLLAPOTVÁLTOZÁS

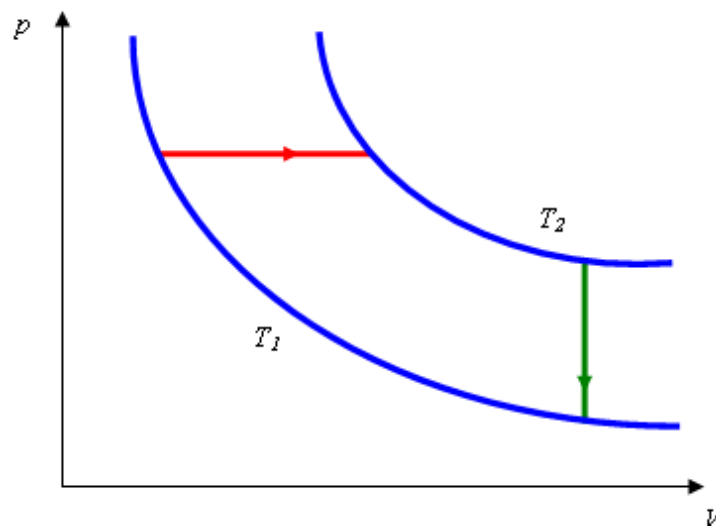
A T hőmérséklet állandó, vagyis pV is állandó,

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

A gáz belső energiája változatlan, így a gázzal közölt hő teljes egészében a **térfogati munkára** fordítódik:

$$Q = W^* = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1}{V} dV = p_1V_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Az alábbi ábrán a p - V diagramon ábrázoltuk az eddig elemzett folyamatokat. A kék vonalak egy-egy **izotermát** jelölnek, azaz olyan görbét, amely mentén haladva a hőmérséklet állandó. Mivel az **állapotegyenlet** szerint a hőmérséklet arányos a pV szorzattal, az is világos, hogy $T_2 > T_1$. A piros vonal egy izobár expanziót (tágulást) jelöl. Ha jobbról balra haladnánk, akkor **izobár kompresszióról** beszélhetnénk. A zöld vonal izochor hűtést ábrázol.



ADIABATIKUS ÁLLAPOTVÁLTOZÁS

Az **adiabatikus** definíció szerint azt jelenti, hogy a rendszer (itt a gáz) nem cserél hőt a környezetével, pl.

mert el van szigetelve, $Q = 0 \Rightarrow \Delta E_b = W = \frac{f}{2} nR\Delta T$.

A **hőtan első főtételének** differenciális alakjából indulunk ki:

$$dE_b = dQ + dW$$

Ebben $dE_{\text{sz}} = f/2 \cdot nRdT$, $dQ = 0$, $dW = pdV$ és mivel $pV = nRT$, $p = nRT/V$. Ezzel:

$$-\frac{f}{2} nRdT = nRT \frac{1}{V} dV$$

Tudjuk, hogy $\kappa = \frac{f+2}{f} = 1 + \frac{2}{f}$, azaz $\frac{f}{2} = \frac{1}{\kappa-1}$, egyszerűsítés után

$$-dT = (\kappa-1) \frac{T}{V} dV$$

ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$-\frac{1}{T} dT = (\kappa-1) \frac{1}{V} dV$$

integráljuk mindkét oldalt

$$-\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = (\kappa-1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

elvégezve az integrálást

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = (\kappa-1) \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}$$

ebből:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2^{\kappa-1}}{V_1^{\kappa-1}} \Rightarrow TV^{\kappa-1} = \text{áll.}$$

Kihasználva, hogy $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$, kapjuk, hogy

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}$$

vagyis

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa}$$

azaz

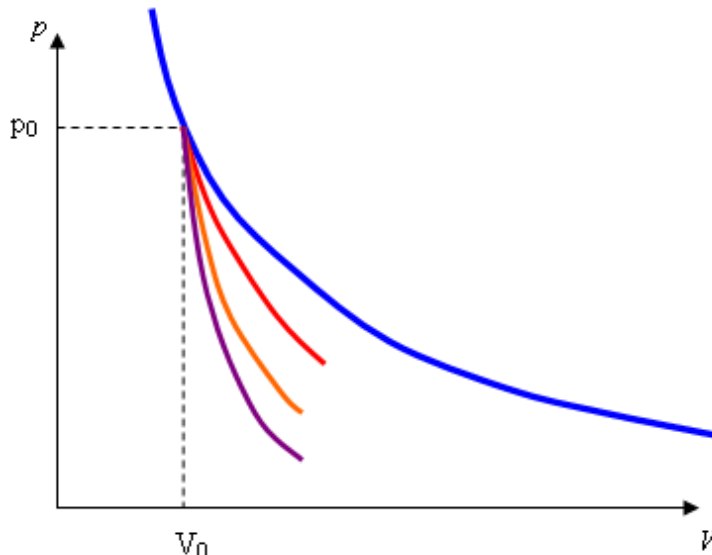
$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$$

Az is igaz, hogy $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$, ebből

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right)^{\kappa} \Rightarrow \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\kappa} \Rightarrow \frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \text{áll.}$$

Ezek a **Poisson-egyenletek**. Ezekből $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ és $\kappa \rightarrow \infty$ esetére visszkapjuk az izobár, izoterm és izochor állapotváltozásokat jellemző értékeket.

Az alábbi ábrán a pV diagramon ábrázoltunk különböző κ értékekkel jellemzett gázok adiabatikus folyamatait. A kék vonal összehasonlításként egy izoterma, egyenlete $p = \frac{p_0 V_0}{V}$. A (V_0, p_0) ponton átmenő adiabaták egyenlete $p = \frac{p_0 V_0^\kappa}{V^\kappa}$, ahol általában $\kappa \in \left\{ \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{5}{3} \right\}$, annak megfelelően, hogy a szabadsági fokok száma 6, 5 vagy 3.



Összefoglalás

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az állandó mólszámú ideális gáz speciális állapotváltozásaira érvényes főbb tudnivalókat.

	Izobár folyamat	Izochor folyamat	Izoterm folyamat	Adiabatikus folyamat
Állandó mennyiség:	Nyomás: $\Delta P = 0$	Térfogat: $\Delta V = 0$	Hőmérséklet: $\Delta T = 0$	Közölt hő: $Q = 0$
Egyesített gáztörvény:	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$
A gáz által végzett munka:	$W^* = nR\Delta T$	$W^* = 0$	$W^* = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$	$W^* = \frac{f}{2} nR\Delta T$
Belső energia megváltozása:	$\Delta E_\delta = \frac{f}{2} nR\Delta T$	$\Delta E_\delta = \frac{f}{2} V \Delta p$	$\Delta E_\delta = 0$	$\Delta E_\delta = \frac{f}{2} nR\Delta T$
Gázzal közölt hő:	$Q = \left(\frac{f}{2} + 1\right) nR\Delta T$	$Q = \frac{f}{2} V \Delta p$	$Q = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$	$Q = 0$

Ideális gázokra vonatkozó egyenletek összefoglalása

5. MINTAFELADATOK

1. Egy lezárt, 100 l-es gázpalackban 4×10^5 Pa nyomású, 7°C hőmérsékletű hélium van. Mennyi lesz a gáz nyomása, ha 70°C -kal megnöveljük a hőmérsékletét? Mennyi hő kellett ehhez?
2. Ideális gáz állandó nyomáson tágulva 200 J munkát végez. Mennyi hőt vesz fel eközben, ha **adiabatikus kitevője** $\kappa=1,4$?
3. Egy $44,8\text{ dm}^3$ térfogatú, vízszintes tengelyű hőszigetelt hengert vékony, súrlódásmentesen mozgó, hőszigetelő dugattyú oszt két részre. A bal oldali térrészbe 200 W teljesítményű fűtőspirál nyúlik be. Kezdetben a dugattyú közepén van és mindkét oldalon 10^5 Pa nyomású nemesgáz van. Mennyi időre kell a fűtést bekapcsolni, hogy a jobb oldali gáz térfogata felére csökkenjen.

6. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

HŐTAN - KINETIKUS GÁZELMÉLET ÉS IDEÁLIS GÁZOK
i

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkor **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

1. Egyik végén lefenekelt hengert ideális gázzal töltünk meg, majd mozgatható dugattyúval zárjuk el a külvilágtól. A henger fala hővezető (pl. acél), így hőt is közölhetünk a gázzal. A gáz térfogatát a tizedére csökkentjük, míg a Kelvin-skálán mért hőmérséklete 2-szeresére növekedett. Mit mondhatunk az összenyomott gáz nyomásáról?

A gáz nyomása 10-szeresére növekedett.

A gáz nyomása az 5-szörösére növekedett.

A gáz nyomása a 20-szorosára növekedett.

A gáz nyomása 2-szeresére növekedett.

Mivel jóhővezető a henger fala, így a nyomás nem emelkedhet a folyamat során.

2. Melyik alábbi állapotjelző extenzív?

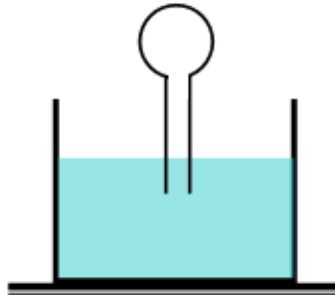
részecskeszám

nyomás

sűrűség

hőmérséklet

3. Egy nyári napon hajnalban kiteszünk egy kád vizet az udvarra, fejjel lefele belógatunk egy lombikot és rögzítjük. Milyen állapotváltozáson megy keresztül a lombikba bezárt levegő a nap folyamán?



izoterm

egyik sem, emellett p , V és T is növekedett

izobár

adiabatikus

egyik sem, emellett p , és T növekedett, V csökkent

izochor

4. Egy elektromos vízmelegítőbe 10°C hőmérsékletű hidegvíz folyik be és 60°C hőmérsékletű melegvízvíz hagyja el. Egy személy a 25 liter fellemelegített vizet mind elhasználta zuhanyzáskor. Az elektromos energia ára 45 Ft/kWh, a víz fajhője pedig 4180 J/kgK. Mennyibe kerül a víz energiájának 1 MJ-lal történő növelése, és hány Ft a zuhanyzás villamosenergia-költsége?

45 Ft/MJ és 235,125 Ft/zuhanyzás 12,5 Ft/MJ és 65,3 Ft/zuhanyzás

65,3 Ft/MJ és 45 Ft/zuhanyzás 273 Ft/MJ és 282 Ft/zuhanyzás

12,5 Ft/MJ és 116,1 Ft/zuhanyzás

5. Két darab, egyenként 10 kg tömegű és 22 °C hőmérsékletű test halad egymás felé. Az egyik sebessége 40 m/s, a másiké pedig 80 m/s. A testek rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lett az ütközés utáni hőmérsékletük, ha a testek anyagának fajhője $c = 150 \text{ J/kgK}$, továbbá az összes energia a testek hőmérsékletének emelésére fordítódott?

70°C

118°C

24°C

34°C

35,33°C

BIBLIOGRÁFIA:

^[i] Forrás: Wikimedia Commons

^[ii] Forrás: Public domain.