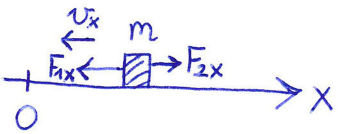
A 10 kg tömegű $P$ tömegpont a rögzített $C$ centrumtól való távolságával arányos visszatérítő erő hatására lineáris rezgést végez, $C$-től 1 m távolságban az erő nagysága 20 N. A tömegpontot körülvevő közeg ellenállóereje a pont sebességével arányos. Kezdetben a test sebessége zérus. A $CP$ távolság három teljes rezgés után a kezdeti értéknek csak az 1/10-e. Mekkora a periódusidő? (4,476 s)

$m = 10\,kg$ ha $|x| = 1\,m$, akkor $|F_{1x}| = 20\,N$

$\frac{x(3T)}{x(0)} = \frac{1}{10}$ $T = ?$ Mivel $F_{1x} = -Dx$, így $20\,N = D \cdot 1\,m \rightarrow D = 20\,\frac{N}{m}$

$F_{2x} = -b v_x = -b\dot{x}$




Dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F_e}$

Mivel 1D a mozgás, elég az (x) egyenlet:

$m a_x = -Dx - b\dot{x}$ (mozgásegyenlet)

A mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = 0$ $/:m$

$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ ahol legyen $\frac{b}{m} = 2\alpha$ és $\frac{D}{m} = \omega_0^2$

$\alpha = \frac{b}{2m}$ (b nem ismert, így $\alpha$ se) (csillapítási tényező)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{20\,N/m}{10\,kg}} = \sqrt{2}\,\frac{1}{s}$ (ez lenne a csillapítatlan harmonikus rezgés körfrekvenciája)

Másodrendű, lineáris, homogén differenciál egyenlet:

$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $x(t) = Ce^{\lambda t}$ alakban keressük

$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda Ce^{\lambda t} + \omega_0^2 Ce^{\lambda t} = 0$ $/:Ce^{\lambda t}$ (ez semmilyen t-re nem nulla)

$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ (karakterisztikus egyenlet)

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega = \frac{2\pi}{T}\ (1)} = -\alpha \pm i\omega$$

Az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ lesz a csillapított rezgés (kváziperiodikus mozgás) tényleges körfrekvenciája. Kisebb mint $\omega_0$ a csillapítás miatt.

(2) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ $\omega_0^2 = 2\,\frac{1}{s^2}$, de $\alpha$ nem ismert.

Mozgásegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$$

Most nem akarjuk a paramétereket mind meghatározni, inkább használjuk fel amit megadtak:

$$\frac{x(3T)}{x(0)} = \frac{1}{10}$$

$$x(0) = A\cos\delta$$

$$x(3T) = Ae^{-\alpha\cdot 3T}\cos(\omega\cdot 3T + \delta)$$

<u>DE</u> $\omega = \frac{2\pi}{T}$, így:

$$x(3T) = Ae^{-\alpha\cdot 3T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 3T + \delta\right) =$$

$$= Ae^{-3\alpha T}\cos(6\pi + \delta) = Ae^{-3\alpha T}\cos\delta$$

A koszinusz $2\pi$ periodicitása miatt!

$$\frac{1}{10} = \frac{Ae^{-3\alpha T}\cos\delta}{A\cos\delta} = e^{-3\alpha T} = \frac{1}{e^{3\alpha T}}$$

Tehát: $e^{3\alpha T} = 10 \quad / \ln$

$$3\alpha T = \ln 10$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\ln 10}{3T}} \quad (3)$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad /^2$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \alpha^2 \quad / \text{beírva (3)-at}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \frac{(\ln 10)^2}{9T^2} \quad / \cdot T^2$$

$$4\pi^2 = \omega_0^2 T^2 - \frac{(\ln(10))^2}{9} \longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} + \frac{(\ln 10)^2}{9\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{2\frac{1}{s^2}} + \frac{(\ln 10)^2}{9\cdot 2\, 1/s^2}$$

$$T^2 = 20{,}034\,s^2$$

$$T = \underline{\underline{4{,}476\,s}}$$