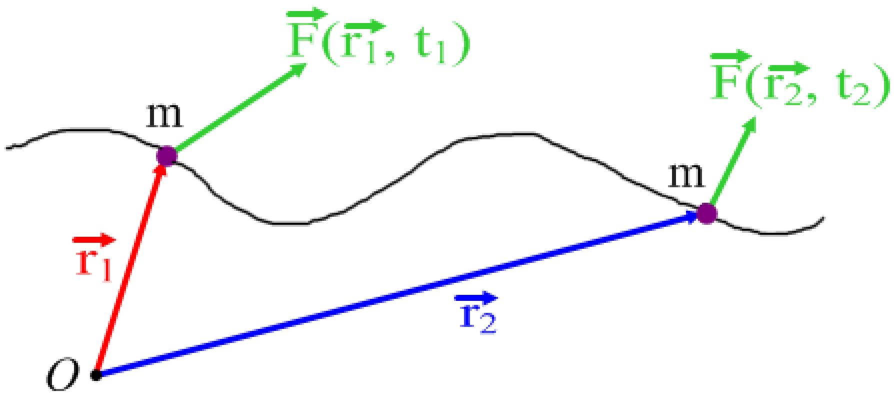
Fizikai mező (erőtér)

<u>Fizikai mező:</u> Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.
Tehát az $\vec{r}$ és t az erő vektorfüggvény változói: $\vec{F}(\vec{r}, t)$

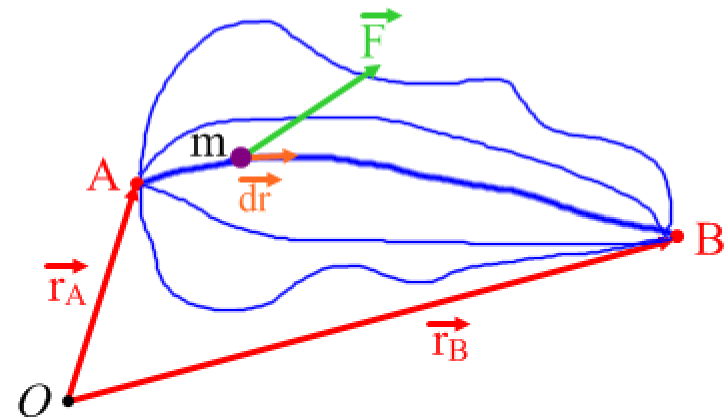


- Az erőtér lehet időtől független (**stacionárius**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0.$
  Ekkor az erő csak a helytől függ: $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőtér lehet helytől független (**homogén**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$
  Ekkor az erő csak az időtől függ: $\vec{F}(t)$

Konzervatív erőterek

Konzervatív erőtér: Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

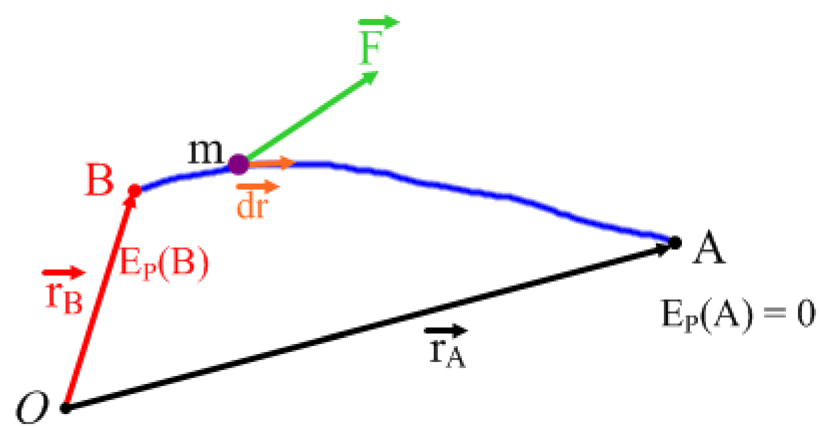


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a tér végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



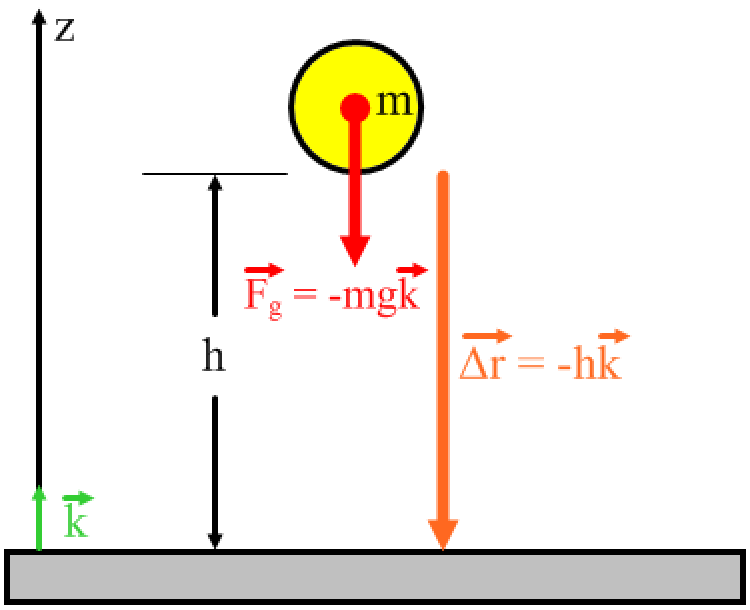
Példa: súlyerő munkája

Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy F_g = 20N súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$E_P(h) = W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^{0} (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) =$$

$$= \int_{h}^{0} -mg\, dz = -mg[z]_h^0 = mgh$$



Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

vagyis esetünkben: W = (20N)(80m) = 1600J

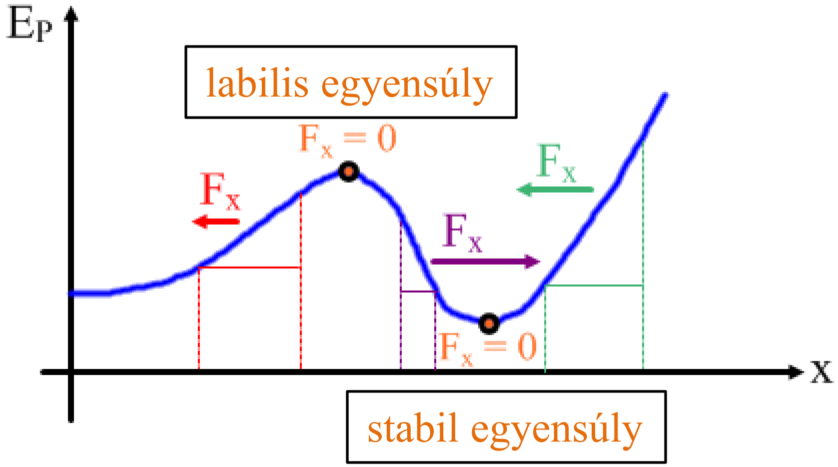
Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között. <u>Megfordítva:</u> Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

Homogén erőtér esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban: $F_x = -\frac{\Delta E_P}{\Delta x}$

<u>Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban:</u> $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

<u>**Energiaminimum elve:**</u> Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).



<u>Három dimenzióban:</u>

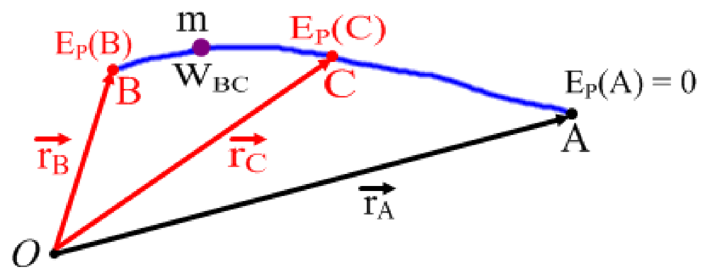
$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} =$$

$$= -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\nabla E_P = -\mathrm{grad}E_P$$

Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test B-ből C-be mozdul.



Ekkor bármely B és C pontokra: $E_P(B) - E_P(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_P = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja: $-dE_P = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve: $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$
A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik.**

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőtérben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Nem konzervatív erők munkája

Amikor **<u>nem</u> konzervatív** erők (*nk*) is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka) a tömegpontra:

$$W_{BC} = {W_{BC}}^{k} + {W_{BC}}^{nk} = E_K(C) - E_K(B)$$

Ahol: ${W_{BC}}^{k} = E_P(B) - E_P(C)$ a konzervatív erő munkája.

Átrendezve a nem konzervatív erők munkájára, és behelyettesítve:

$${W_{BC}}^{nk} = E_K(C) - E_K(B) - E_P(B) + E_P(C)$$

$${W_{BC}}^{nk} = E_K(C) + E_P(C) - E_P(B) - E_K(B)$$

Mivel: $E_k(C) + E_P(C) = E_M(C)$ és $E_P(B) + E_K(B) = E_M(B)$

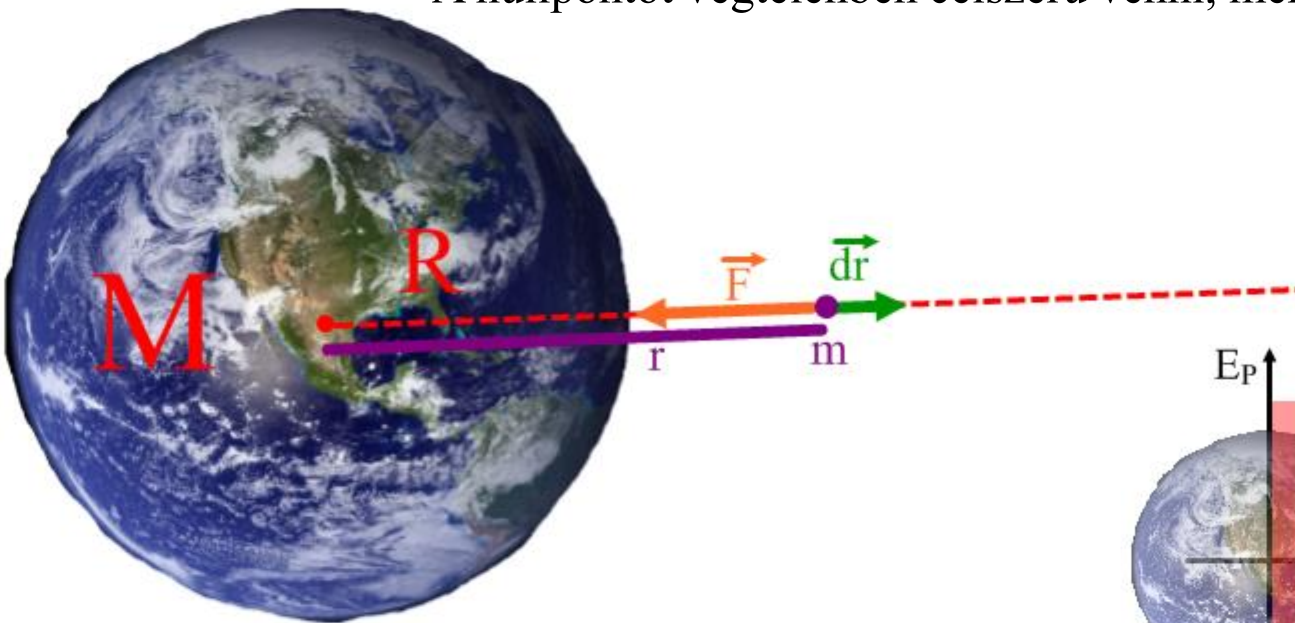
$${W_{BC}}^{nk} = E_M(C) - E_M(B)$$

Tehát a nem konzervatív erők munkája egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példák konzervatív erőterekre

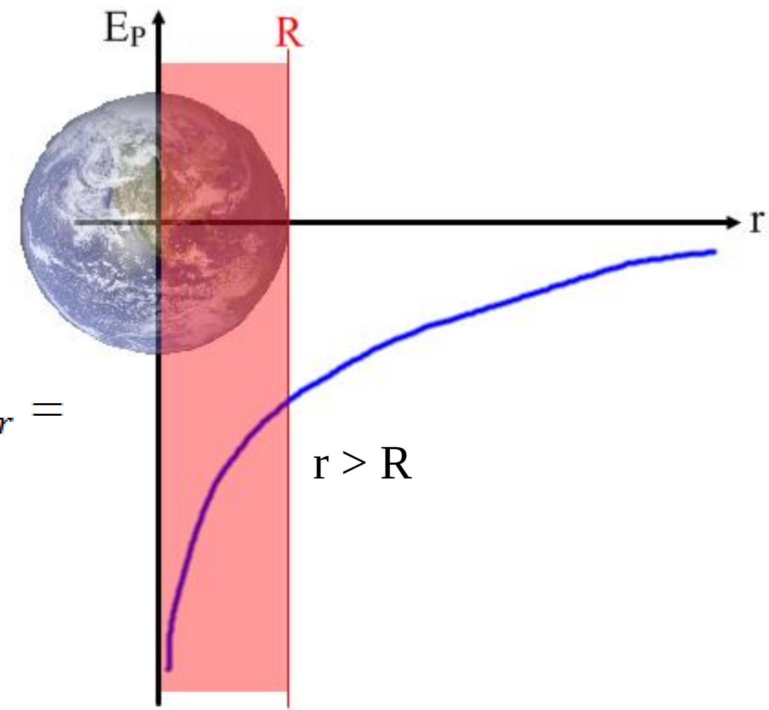
Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a *M* tömegű test rögzítve, és tőle *r* távolságban kiszámoljuk a *m* tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.
A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert *r* = 0 problematikus.



$$E_P(\vec{r}) = W_{\vec{r},\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r\right) dr\vec{e}_r =$$

$$= \int_{r}^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r}$$

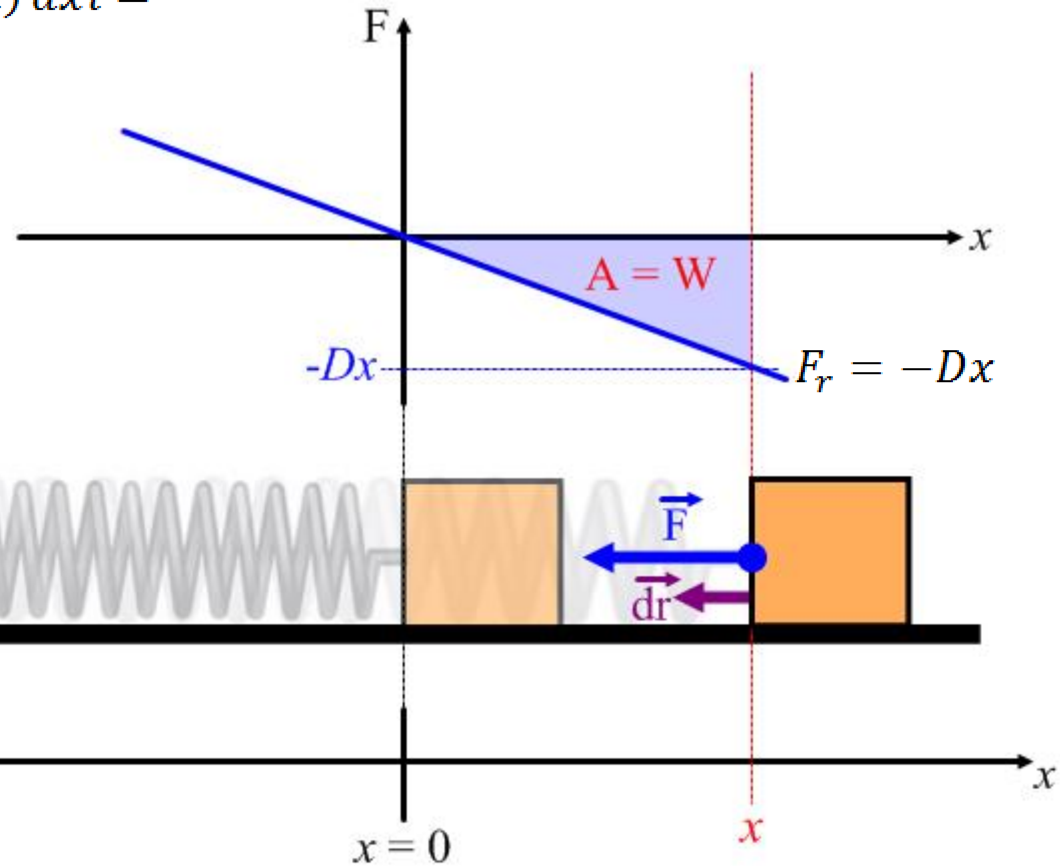


Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.
Az *x* hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

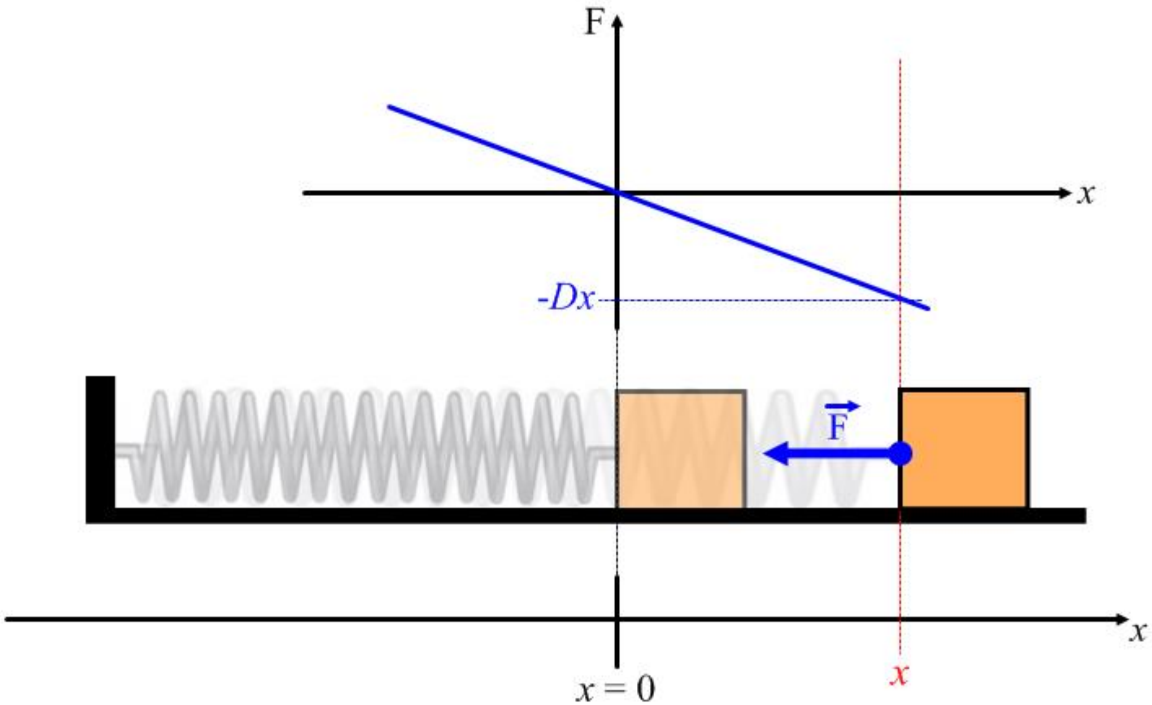
$$E_P(x) = W_{\vec{r},O} = \int_{\vec{r}}^{O} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{O} (-Dx\vec{\imath})\, dx\vec{\imath} =$$

$$= \int_{x}^{0} -Dx\, dx = -D\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}Dx^2$$



Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

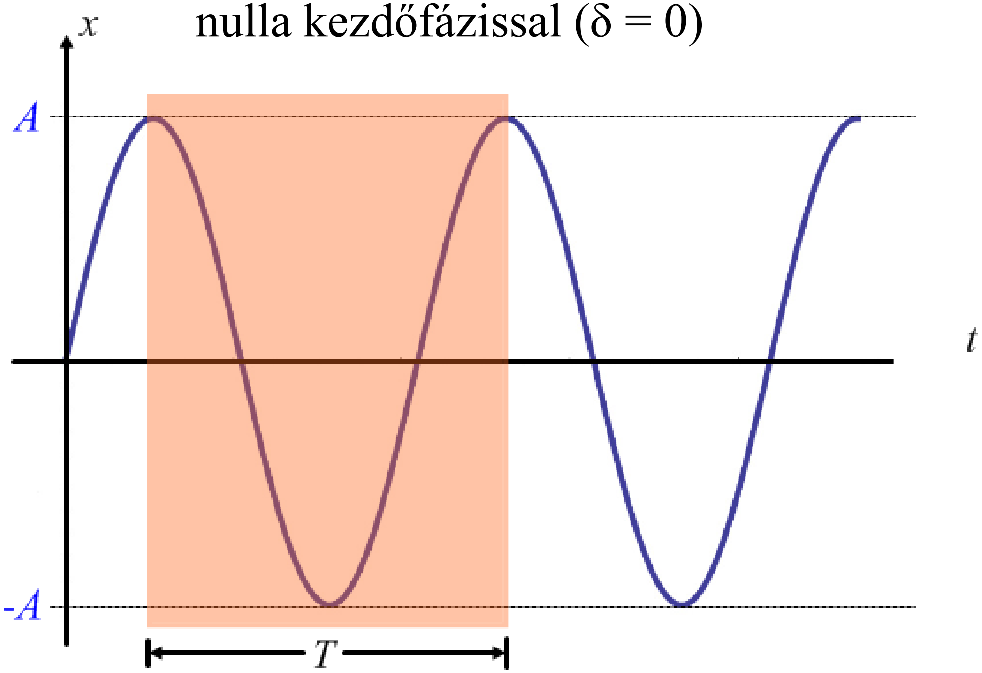
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{array} \right.$

ω: körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal (δ = 0)



$$x(t) = x(t+T)$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

Kinetikus és potenciális energia

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva (δ = 0)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva (δ = 0) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

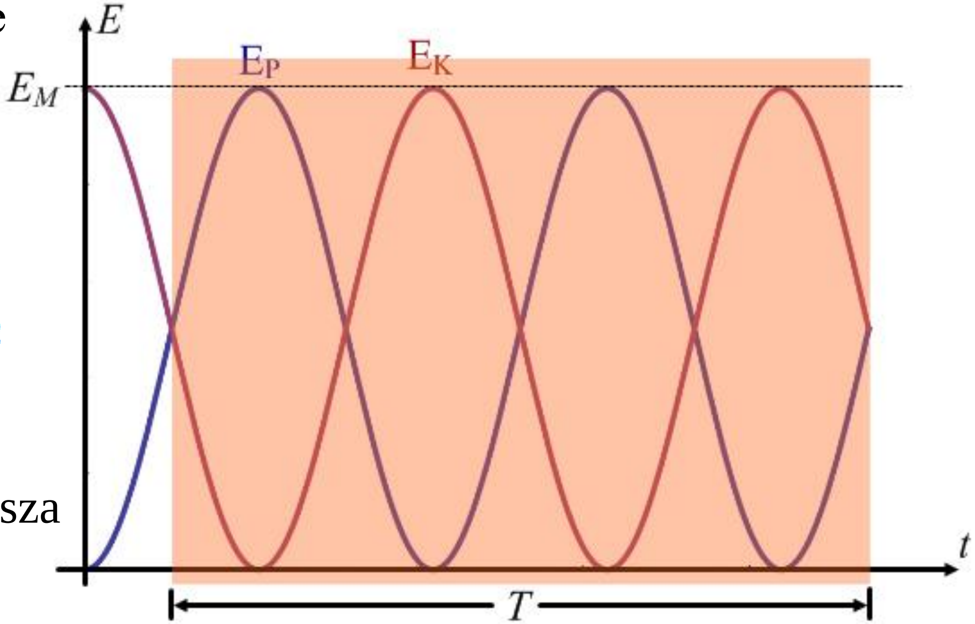
Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

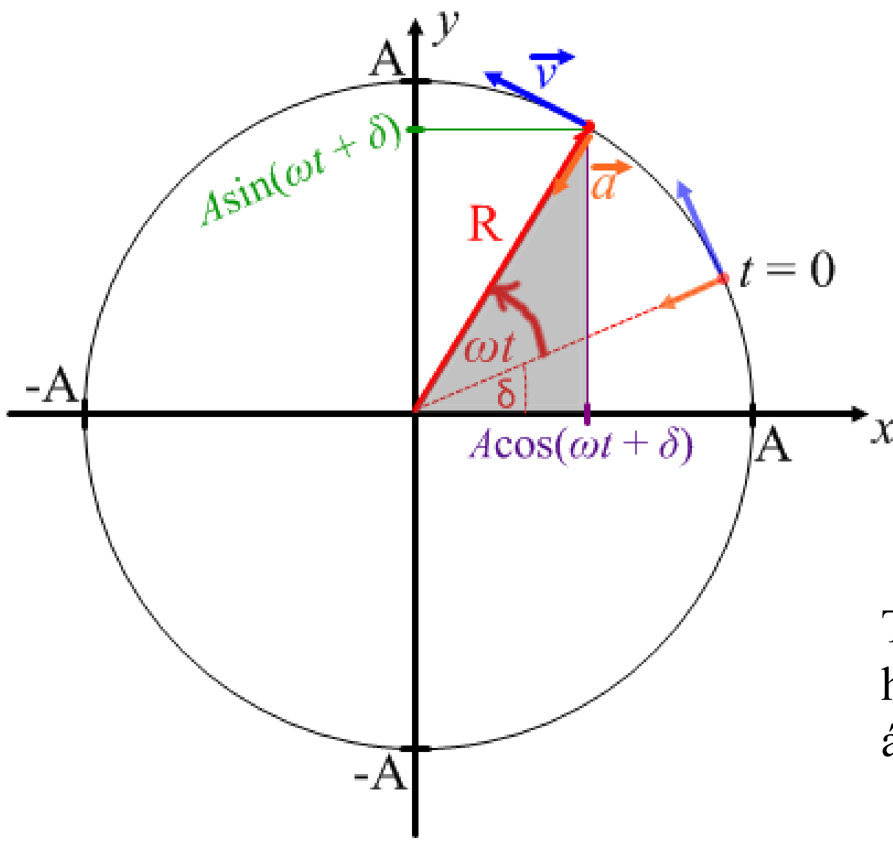
$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$



A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.

Egyenletes körmozgás és harmonikus rezgés kapcsolata

Körmozgás esetén mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.



T: keringési vagy periódusidő
ω: szögsebesség vagy körfrekvencia

Felhasználva a kapcsolatot:

$R = A$
$v_{ker} = R\omega = A\omega = v_{max}$
$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A = a_{max}$$

Tehát a körmozgás két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevéseként áll elő:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A\sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hogy körmozgás legyen az eredmény, frekvenciák és amplitúdók meg kell egyezzenek, fáziskülönbség pedig π/2 kell legyen. ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

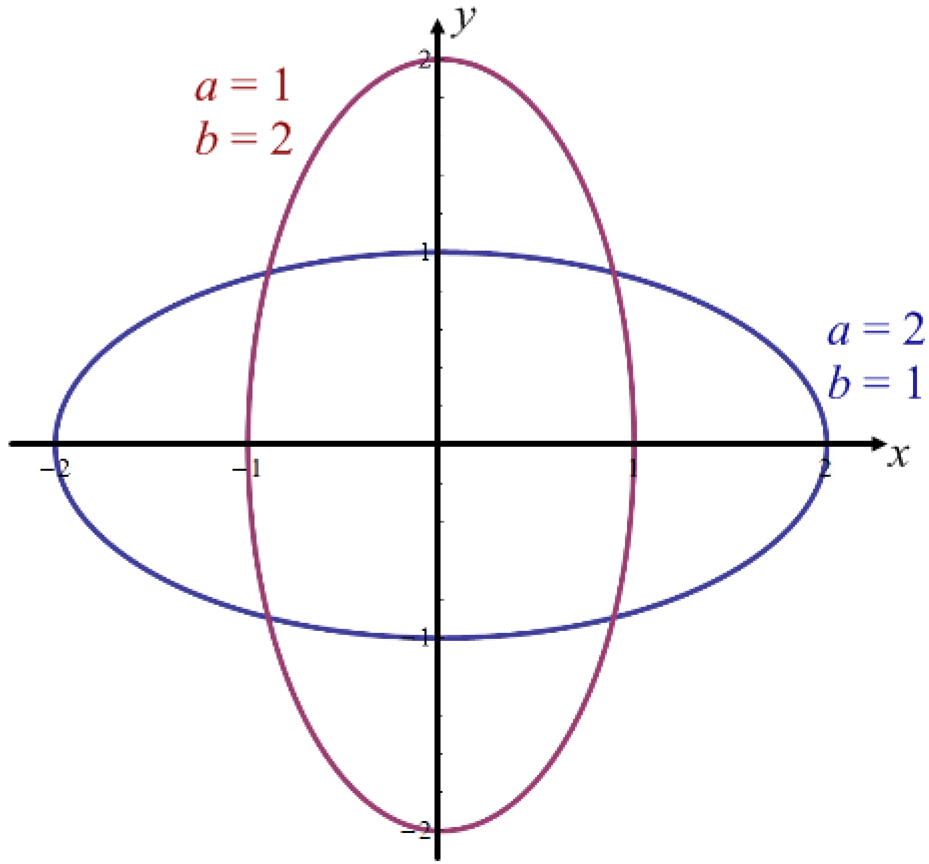
Merőleges rezgések összetevése (többi eset)

Eltérő amplitúdók, π/2 fáziskülönbség

A két merőleges kitérésre: $\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \quad \frac{x}{a} = \cos(\omega t) \quad \text{és} \quad \frac{y}{b} = \sin(\omega t)$

frekvenciák azonosak

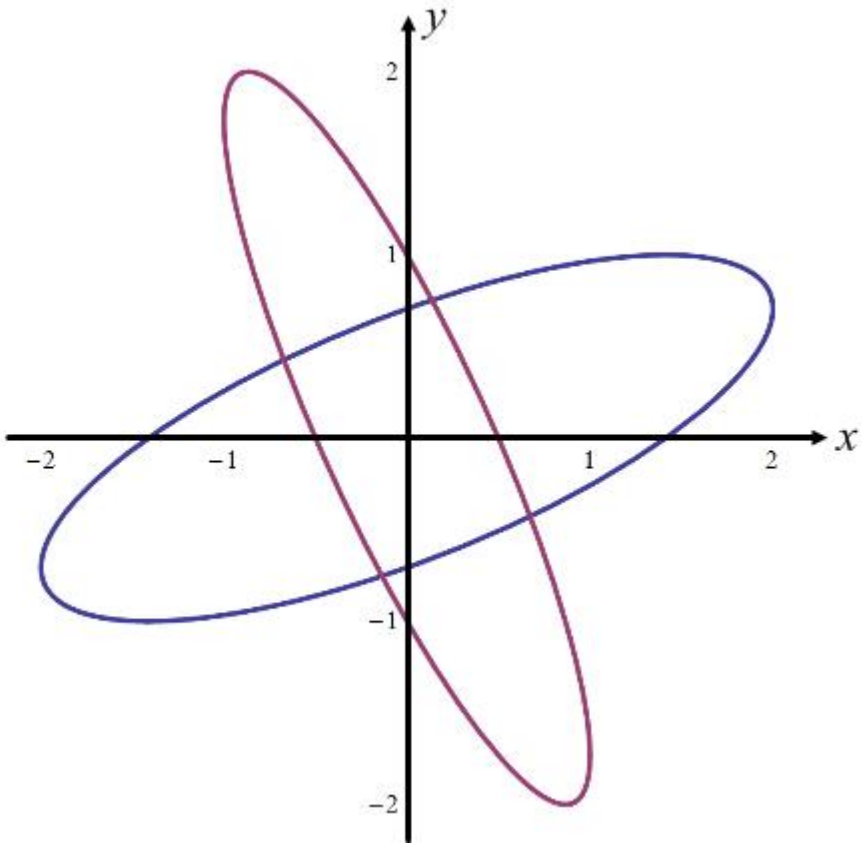
Tehát: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



Tetszőleges fáziseltérés

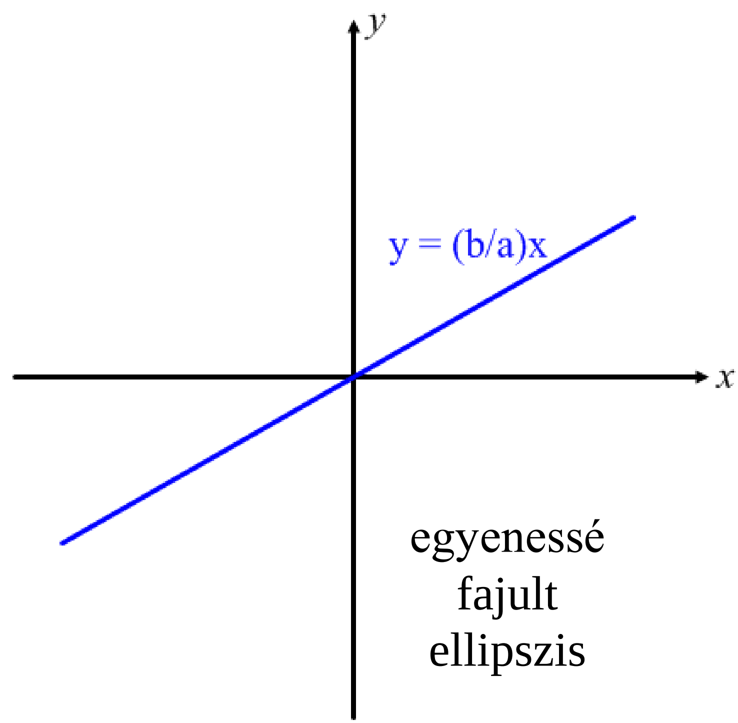
Abban az esetben, ha a frekvenciák azonosak, az amplitúdók nem, és a fáziseltérés bármi:
A mozgás továbbra is **ellipszis** alakú:

viszont torzul és elfordul
-5π/6 illetve -π/4 fáziskülönbség



másik speciális eset: 0 fáziskülönbség
(vagy π)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\sin(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \longrightarrow y = \frac{b}{a}x$$



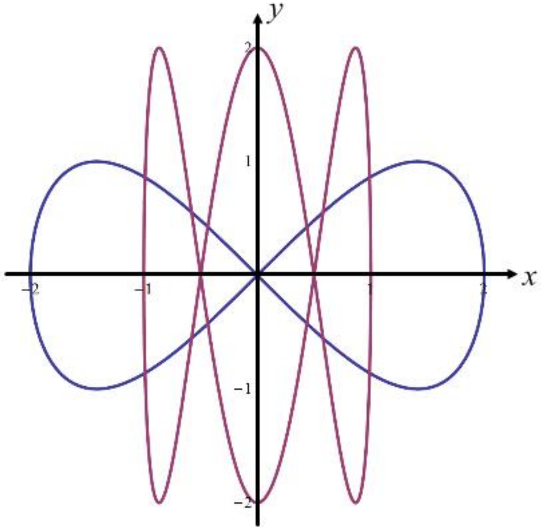
Lissajous-görbék

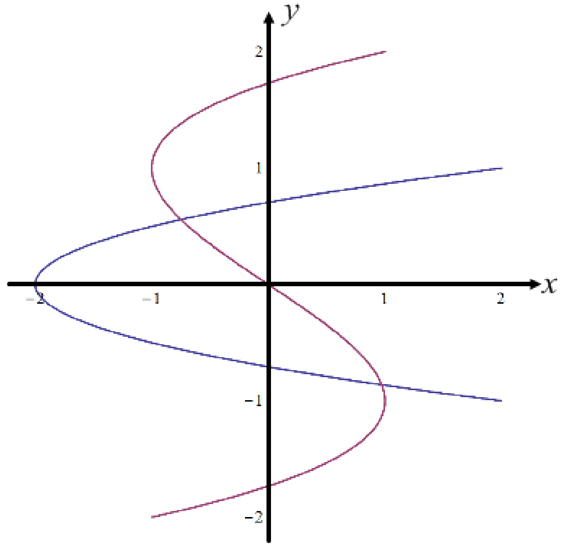
Teljesen általános eset: A frekvenciák sem egyeznek meg.

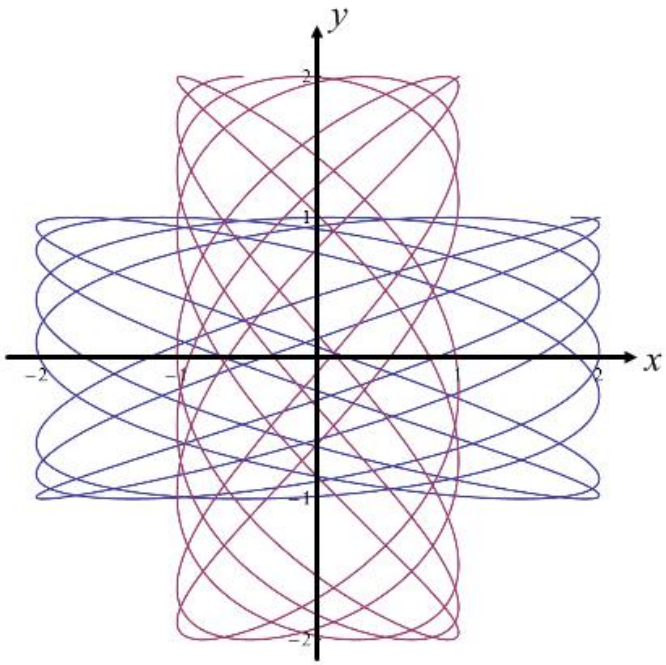
A mozgás **periodikus**, ha a frekvenciák aránya **racionális**
pl. 1/2 vagy 1/3
(y: -π/2 fáziskülönbség)

2 vagy 3
(0 fáziskülönbség)

Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor soha nem zárul a görbe, a mozgás nem periodikus (ismétlődő). pl.
(0 fáziskülönbség) $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$





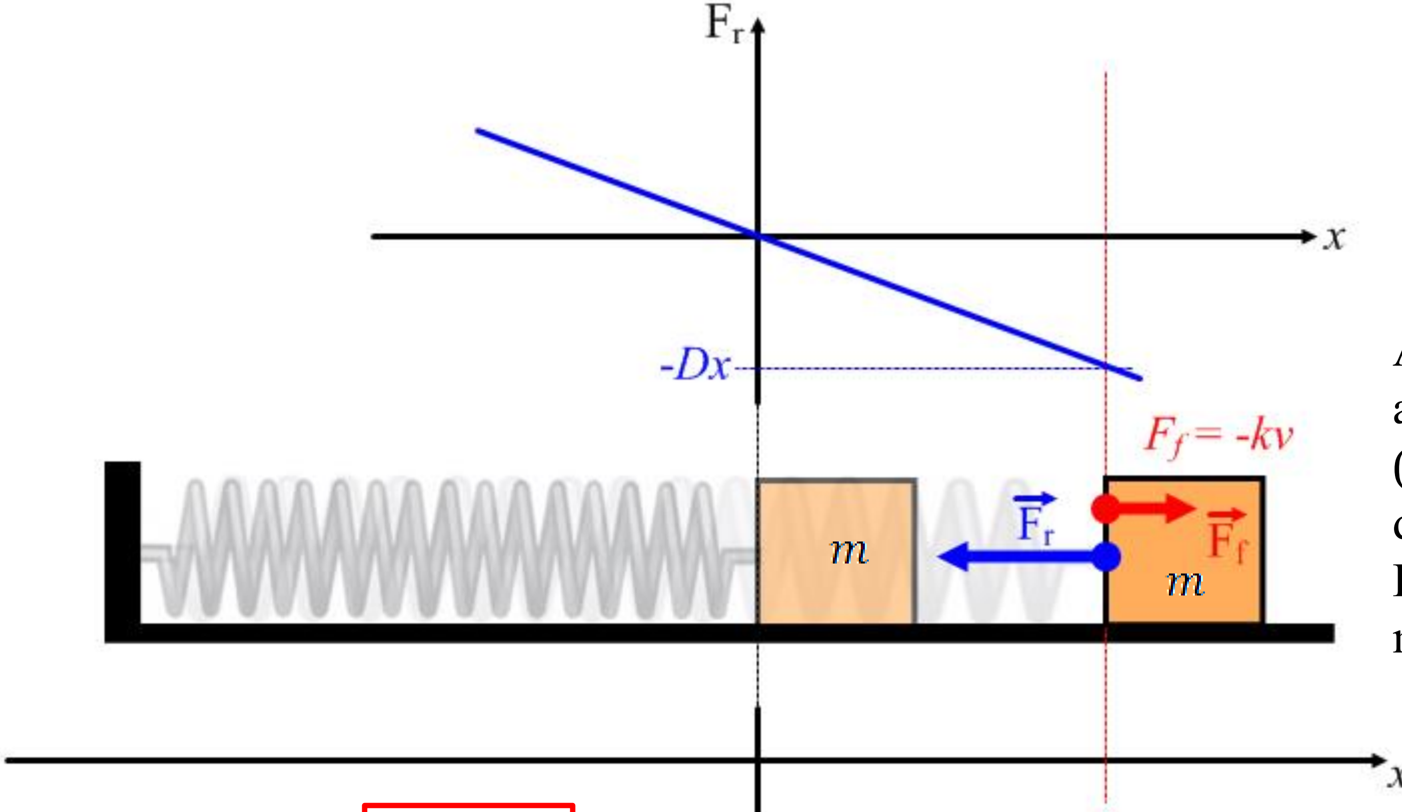


a pálya ismétlődő görbét alkot
a periódusidők legkisebb közös többszöröse múlva
ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

a pálya sohasem ismétlődik
(teljesen besatírozná...)

Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak.
A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_e}$$

$a = \ddot{x}$ $\qquad v = \dot{x}$

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás *x* mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ $\frac{D}{m} = \omega_0{}^2$ ω_0 - a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)

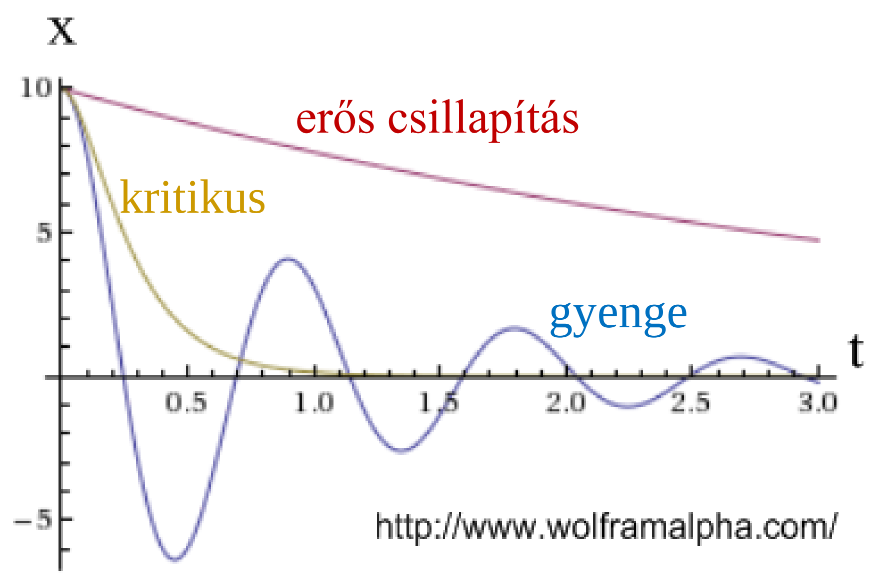
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ $\alpha = \frac{k}{2m}$ α - a csillapítási tényező

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0{}^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0{}^2 = 0$

Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$



Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 > 0$

Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - {\omega_0}^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -\alpha \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

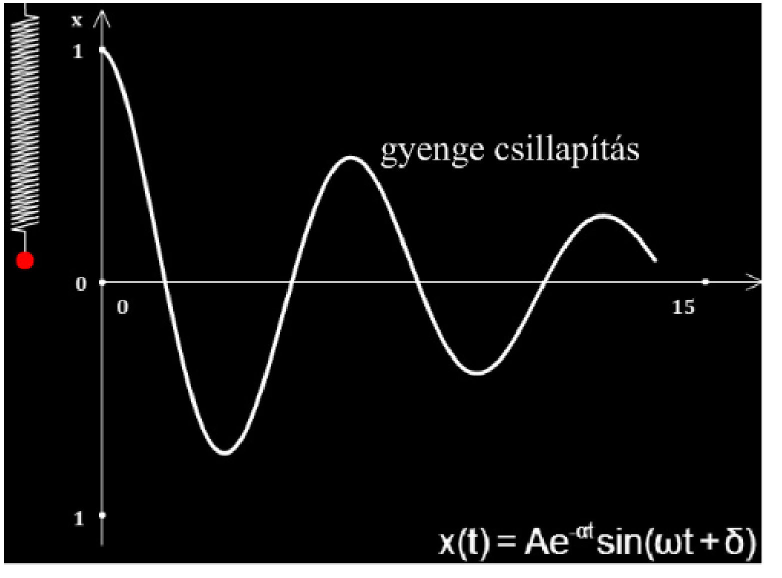
A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha C e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta) + \omega C e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$$

A ***C*** és **δ** konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.
Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és
a két egyenletet megoldva
a konstansok kiszámolhatók.



ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

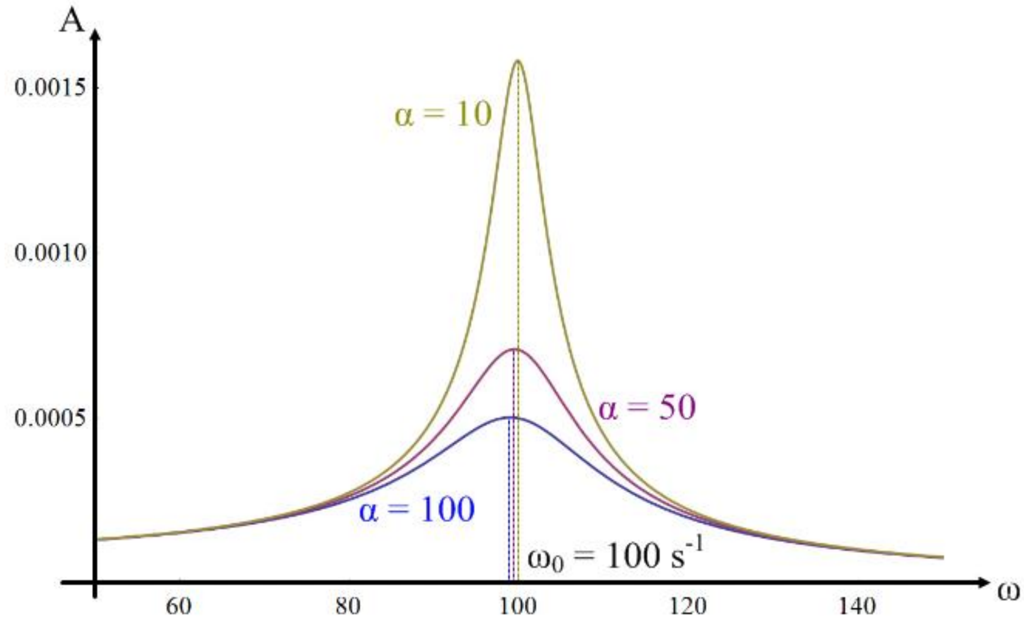
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta) \qquad \frac{D}{m} = {\omega_0}^2$$

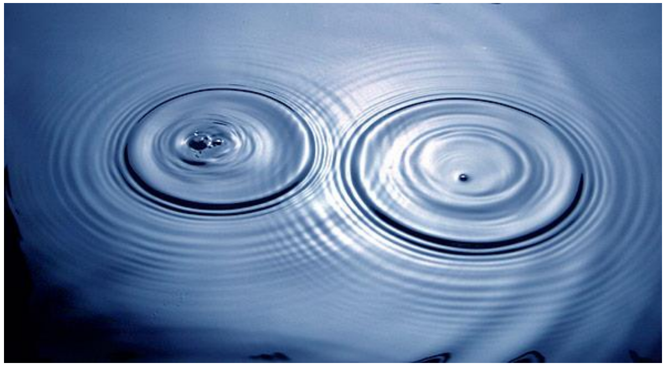
ω_0 - sajátfrekvencia
δ - fáziskésés

<u>Rezonancia</u>: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.
Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik…) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.
Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)



A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).
Ez határozza meg milyen időkésés van a két távoli pont rezgése között.
Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot
(vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).
A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A\sin(\omega t)$
Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

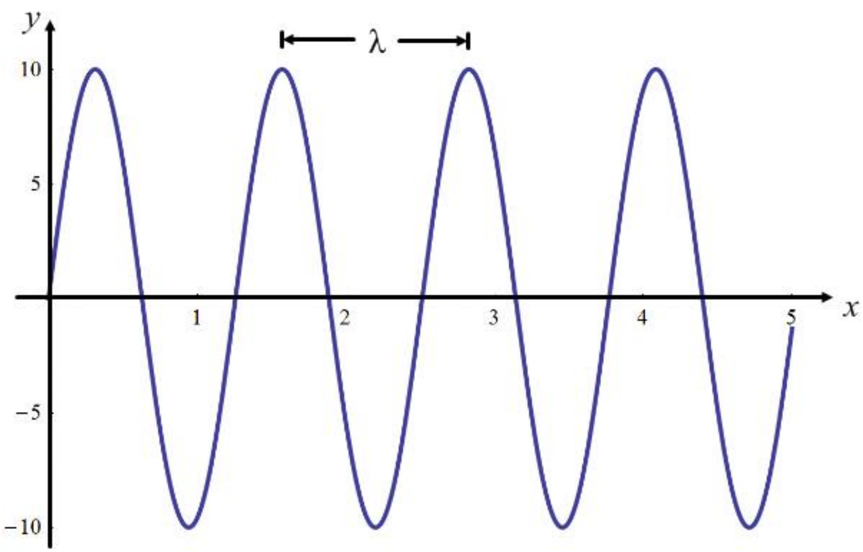
$$y(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

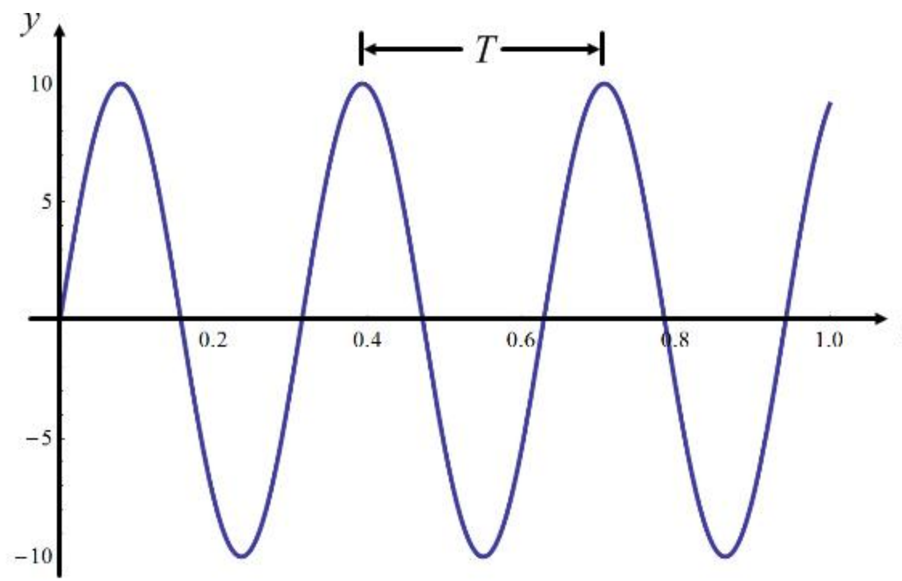
T: a rezgés **periódusideje** ω: a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
λ: a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$
k: **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $\boxed{c = \lambda f}$

Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

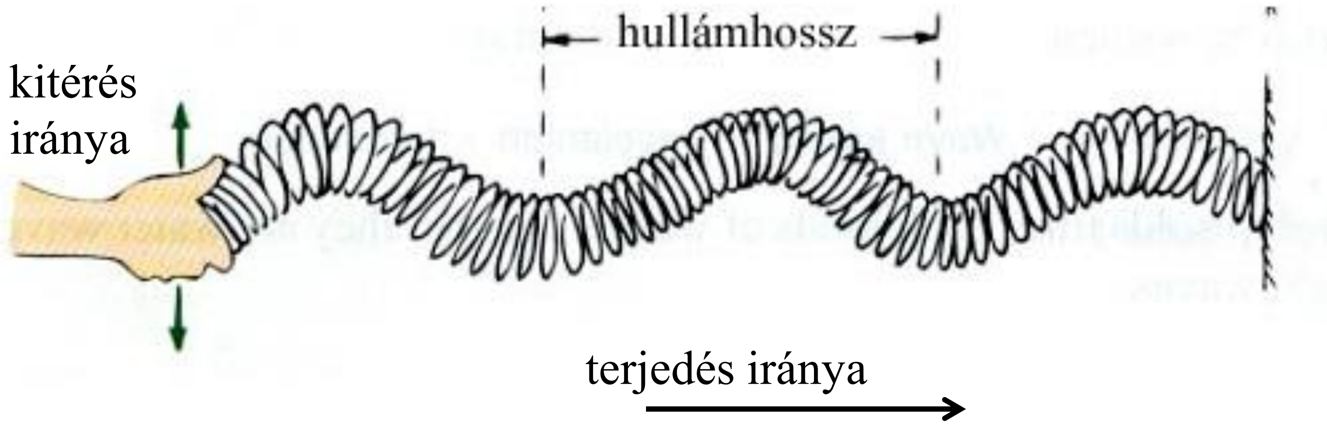


A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

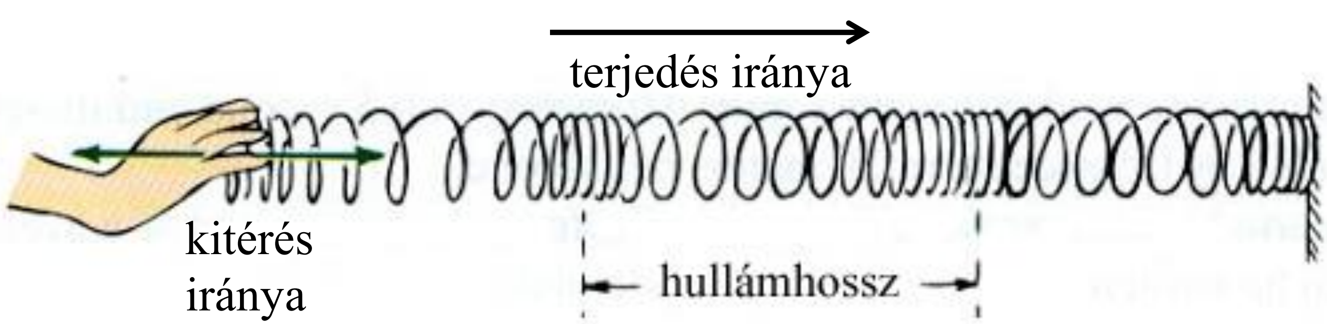


Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok



transzverzális hullám:
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos
a terjedési iránnyal

a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)