Elektromágneses hullámegyenlet

Valódi töltésektől és vezetési áramoktól mentes szigetelőkre felírva az első két egyenletet:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Az anyagegyenletek továbbá: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$ $\qquad$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Ezekből levezethetők a homogén hullámegyenletek a térerősségekre.
Bármely komponensre (*i* lehet *x*, *y*, vagy *z*):

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

Összehasonlítva az általános homogén hullámegyenlettel egy tetszőleges *u* mennyiségre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$$

Δ: Laplace operátor

Az általános alakban *v* a hullám terjedési sebessége, tehát az elektromágneses hullámra:

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ amely vákuum esetén: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \, \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (a fény sebessége vákuumban)

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a hullám forrásától elegendően messze vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy *z* irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0}\sin\left[2\pi\left(ft - \frac{z}{\lambda}\right)\right] = E_{x0}\sin(\omega t - kz)$$

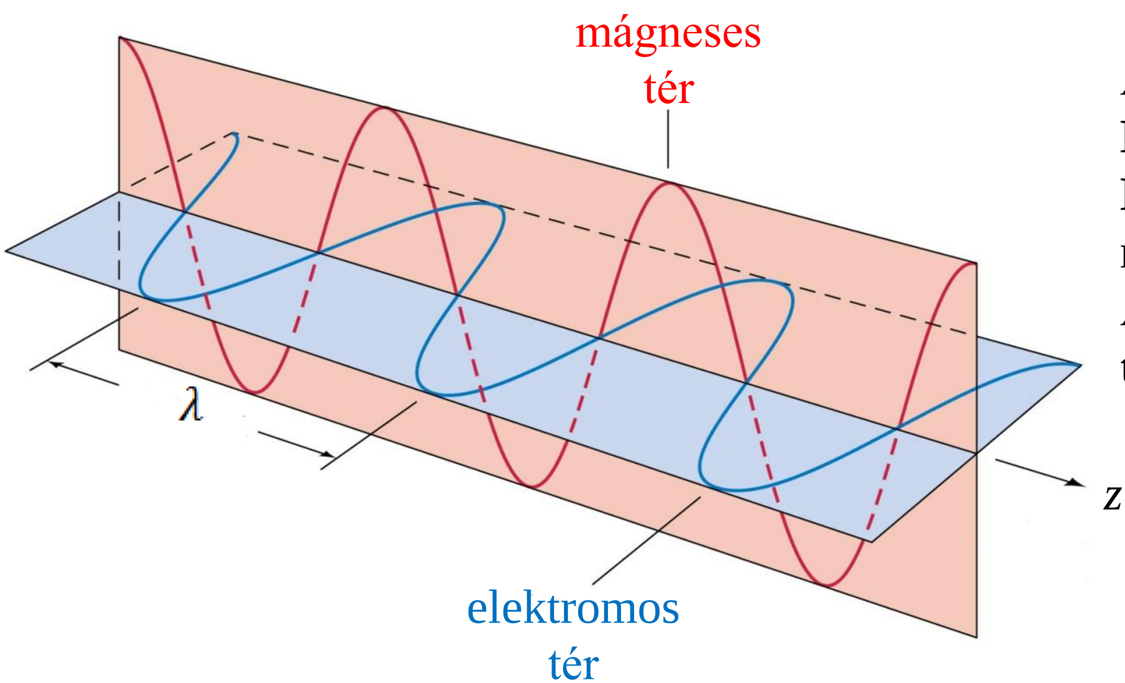
$$H_y = H_{y0}\sin\left[2\pi\left(ft - \frac{z}{\lambda}\right)\right] = H_{y0}\sin(\omega t - kz)$$

f: frekvencia λ: hullámhossz

$\omega = 2\pi f$ körfrekvencia

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ körhullámszám

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.



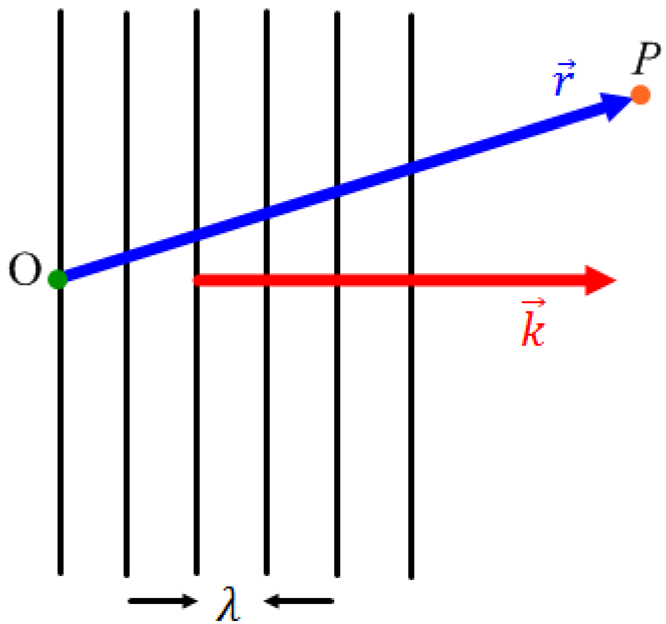
Az elektromágneses hullámban **E** és **H** merőleges, továbbá **E**, **H**, és **v** jobbsodrású rendszert alkot (itt *x*, *y*, *z*). Az elektromágneses hullám **transzverzális**.

Animáció kattintva!

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$



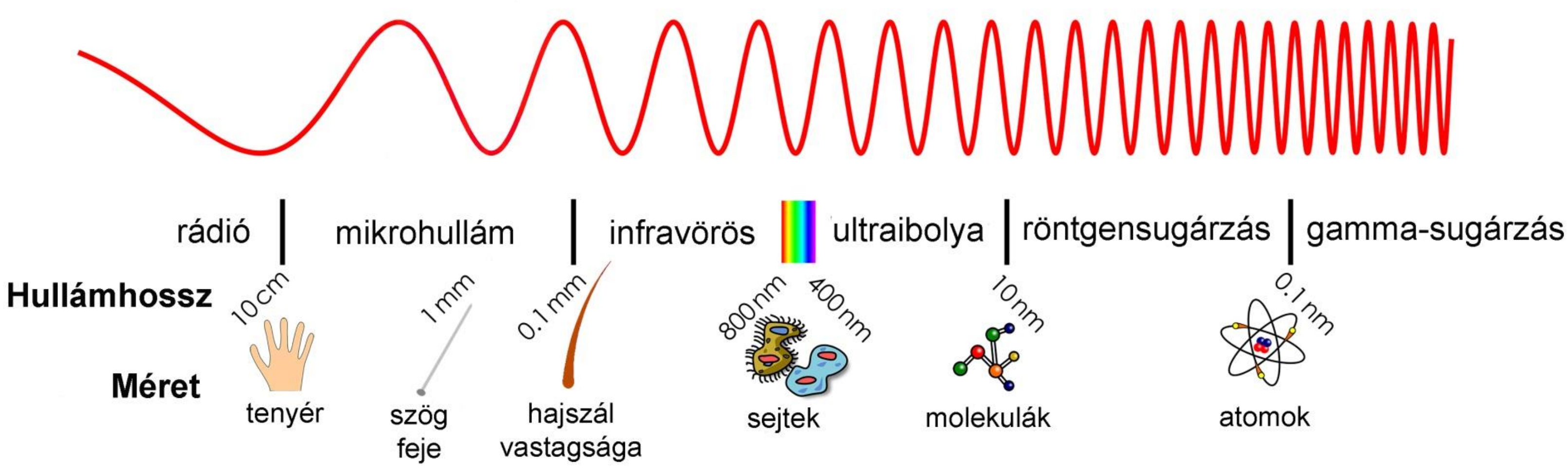
Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

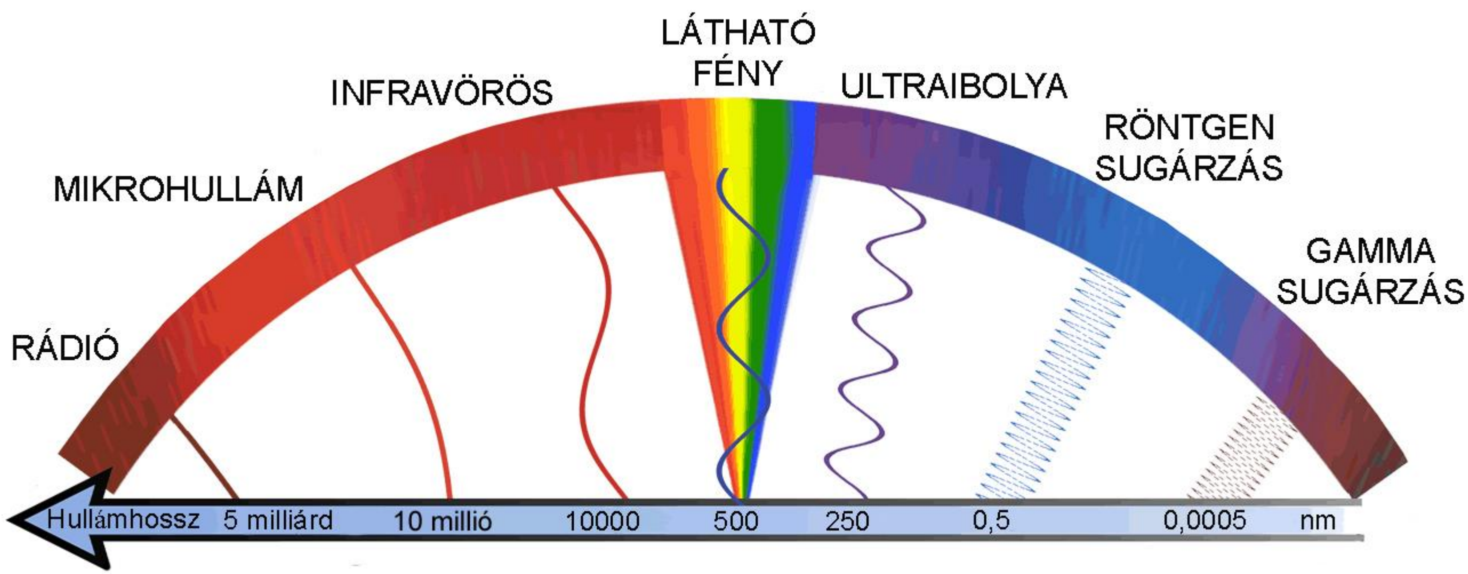
Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színkép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyságrenden keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:





Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiaterjedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad [\vec{S}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \rightarrow$ a csúcsértékekre: $\frac{1}{2}\varepsilon {E_0}^2 = \frac{1}{2}\mu {H_0}^2 \rightarrow {H_0}^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} {E_0}^2$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})H_0\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) =$$

$$\vec{e}E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = \vec{e}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}{E_0}^2\sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$\vec{e}$ a hullám terjedési irányába mutató egységvektor

10. feladat

Emellett írható még: $\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\varepsilon E^2\vec{e} = v\varepsilon E^2\vec{e} = v w_{EM}\vec{e} = w_{EM}\vec{v}$

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T {E_0}^2 \sin^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{{E_0}^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.
Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)$ $\qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta\right)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right) + \vec{E}_{20} \cos\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta\right)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = {\vec{E}_1}^2 + {\vec{E}_2}^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

Animáció kattintva!

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle E^2\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle {E_1}^2\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle {E_2}^2\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{{E_{10}}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{{E_{20}}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\langle 2\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos(\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r})\cos(\omega t - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \delta)\right\rangle \quad \begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{cases} \quad +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\langle \vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\left[\cos(2\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r} - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \delta) + \cos(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \vec{k}_1\cdot\vec{r} - \delta)\right]\right\rangle$$

Az első tag időátlaga 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos\left[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\cdot\vec{r} - \delta\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos[\Delta\varphi]$$

$\Delta\varphi$: fáziskülönbség

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$

Hullám viselkedése két közeg határfelületén*

Különböző közeghez érve a hullám egy része mindig visszaverődik (ugyanolyan szögben), a másik része pedig megtörve behatol a másik közegbe. Bizonyos esetekben a hullám teljes mértékben visszaverődik.

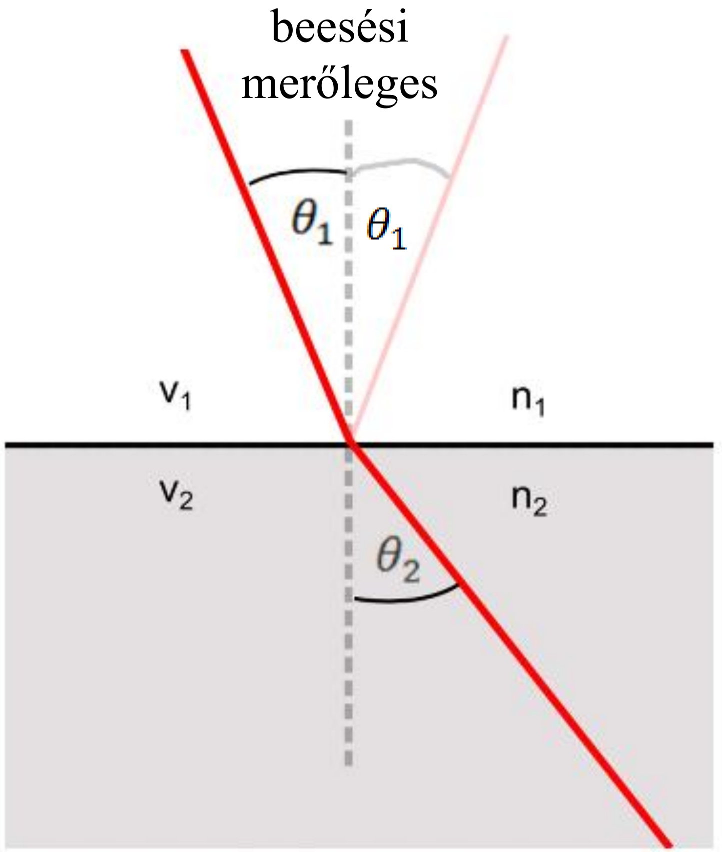
Animáció kattintva!

A beesési és a törési szögekre érvényes a Snellius-Descartes törvény:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

n_1 és n_2 az 1-es és 2-es közeg abszolút törésmutatója (vákuumra vonatkoztatott), míg n_{21} a 2-es közeg 1-esre vonatkoztatott törésmutatója.
A törésmutató a közegekben mért fénysebességek hányadosának reciprokja:

$$n_1 = \frac{c}{v_1}$$



A teljes visszaverődés határszöge:

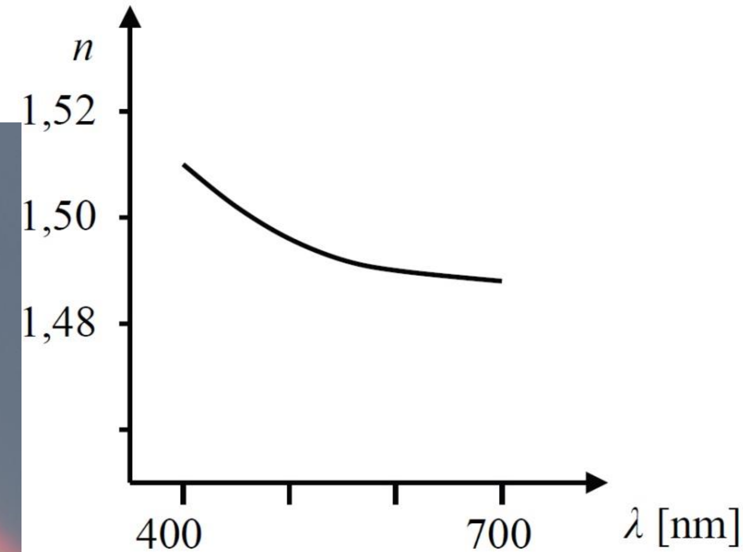
$$\sin\theta_2 = \sin 90° = 1 \rightarrow \ \sin\theta_{1h} = n_{21}$$

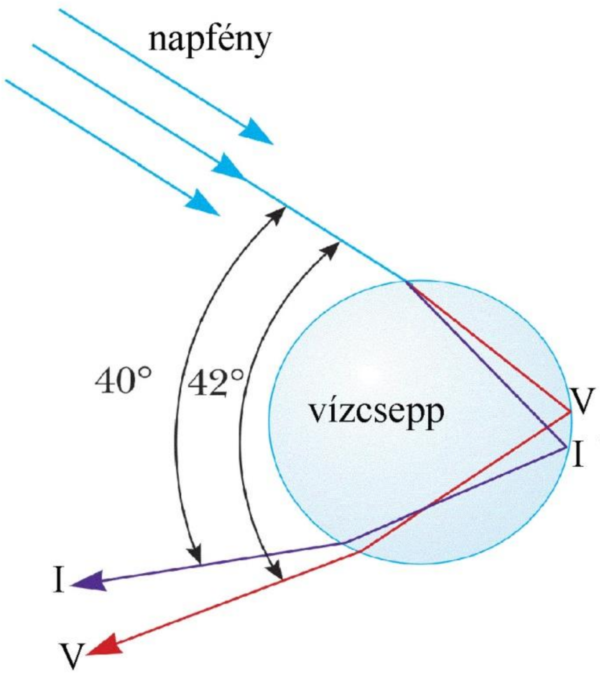
Csak akkor lehetséges ha $n_{21} < 1$, vagyis $n_2 < n_1$ (sűrűbb közegből ritkább felé haladva)

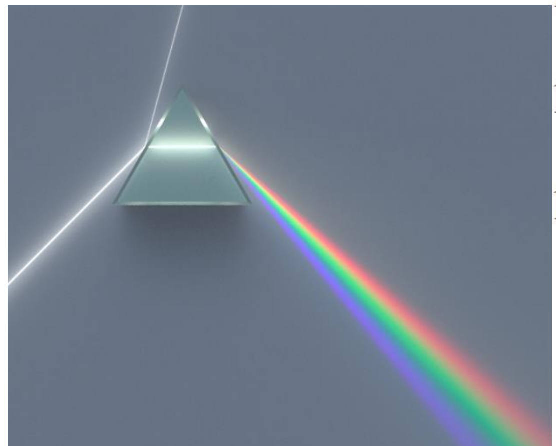
Diszperzió*

Egy közeg törésmutatója általában függ a rajta áthaladó fény hullámhosszától. Emiatt a különböző színű fénysugarak különböző mértékben törnek meg.

Az ilyen eszközökkel a fehér fény színeire bontható:







A modern fizika születése

Lord Kelvin a 19. század végén azt mondta, hogy a fizika egy befejezett tudomány:

„Nincsen olyan probléma amit a tudomány ne tudna megoldani. A fizika egy befejezett tudomány, elméleteink olyan jól működnek, hogy biztosan helyesek. Talán két picike felhő van a tiszta kék égen.”

Ezek a felhőcskék (fény terjedése és a hőmérsékleti sugárzás) azonban alapjaiban rengették meg a fizikát és két új elmélet megalkotásához vezettek:

- Relativitáselmélet (speciális és általános)

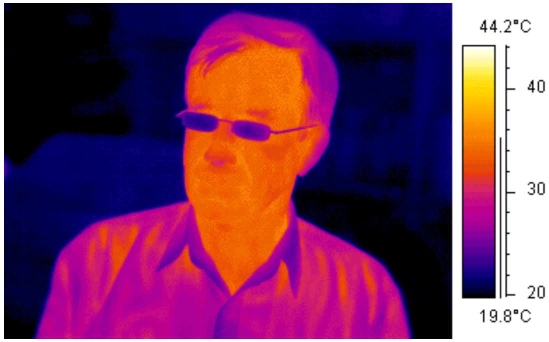
- Kvantum fizika

Ezáltal a 20. század eleje egyben a modern fizika kezdetét is jelentette.

A hőmérsékleti sugárzás

Felhevített tárgyak több száz fokos hőmérsékletet elérve először vörösen, majd még magasabb hőmérsékleten sárgán izzanak, tehát fényt (elektromágneses hullámokat a látható tartományban) bocsátanak ki.

Bár csak a nagyon forró testek sugárzását láthatjuk saját szemünkkel, műszerek segítségével az alacsonyabb hőmérsékletű testek sugárzását is megmérhetjük. Minden test, aminek a hőmérséklete nem abszolút nulla, sugároz.



A hőmérsékleti sugárzást feketetest sugárzásnak is nevezik.

Ideális fekete test: amely a ráeső sugárzást teljesen elnyeli, és a kibocsátott sugárzása csak a hőmérséklettől függ. Ez bármely anyagból készült üreges testel és azon egy kicsiny lyukkal valósítható meg, mert a lyukra igaz, hogy

• a ráeső sugárzás a lyukon mind bemegy az üregbe

• az üreg belső faláról visszavert fény nagy valószínűséggel belül marad és elnyelődik

• belül az elektromágneses sugárzás és az anyag között termodinamikai egyensúly áll be

• a sugárzás spektruma ekkor csak az anyag hőmérsékletétől függ.

A hőmérsékleti sugárzás spektruma

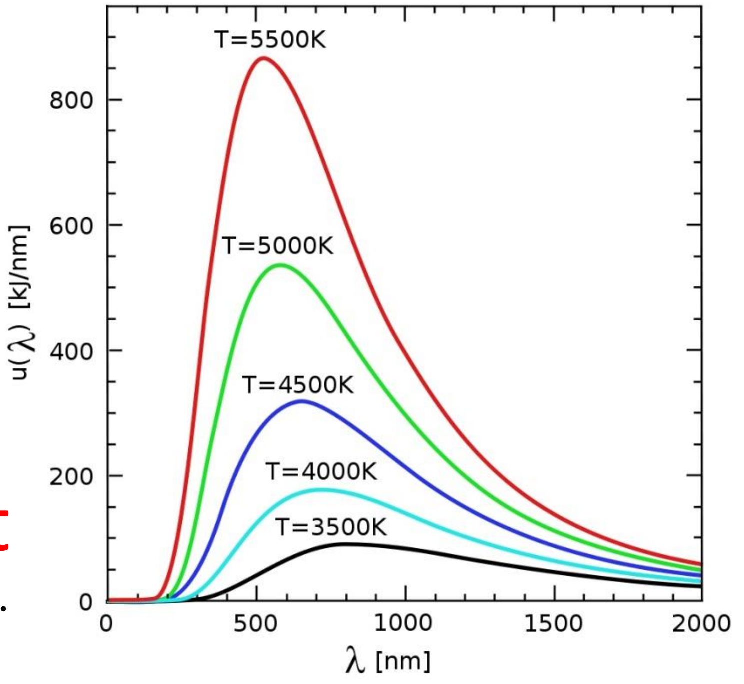
Maxwell egyenleteiből klasszikus elgondolással nem sikerült levezetni a hőmérsékleti sugárzást leíró egyenletet (kis frekvenciákra és nagyfrekvenciákra voltak közelítő képletek, de ezek a teljes tartományra végtelent adtak a kisugárzott teljesítményre).

Végül **Max Planck** sikerrel járt, de csak úgy, hogy feltételezte, hogy az elektromágneses energia nem lehet folytonos, hanem csomagokban van jelen (fotonok), melyek energiája *f* frekvenciájú sugárzás esetén:

$E = hf$ ahol h a Planck konstans: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js

Ez egyre jobban feltűnő amikor a frekvencia nagy és a csomagok (kvantumok) energiája nagy, például gamma sugárzás esetén. Ez az eredmény jelentette a **kvantum fizika** kezdetét.

Az emisszió-képesség hullámhosszfüggése (spektrum):



Nagyobb hőmérsékleten a görbe maximuma alacsonyabb hullámhossz felé tolódik: **Wien-féle eltolódási törvény**:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{állandó}$$

A Wien-féle állandó értéke $2{,}9 \cdot 10^{-3}$ Km.

A teljes kisugárzott teljesítményt (görbe alatti területet, vagyis az integrált) a hőmérséklet függvényében a **Stefan-Boltzmann törvény** adja meg:

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot A$$

11. feladat

ahol $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2·K^4) a Stefan-Boltzmann állandó.

Fényelektromos hatás (fotoeffektus)

Ultraibolya fény hatására egy cinklemezt elektronok hagynak el.
A jelenséget a fény hullámtermészetével magyarázva azt várjuk, hogy az elektronok kilépése csak a hullám intenzitásától függ.
Kísérleti tapasztalat:

- Ha a megvilágító fény frekvenciája nem ér el egy f_0 (határfrekvencia) értéket akkor elektronkilépés nincs, bármekkora is az intenzitás (f_0 az anyagi minőségtől függ).
- Ha van kilépés, akkor a kilépő elektronok sebessége a fény frekvenciájától függ.
- A kilépő elektronok száma arányos a fény intenzitásával, állandó $f > f_0$ mellett.
- Az elektronok kilépése szinte azonnal megindul a megvilágítás kezdetétől mérve.

Ezek a tapasztalatok a fény hullámtermészetével nem magyarázhatók.

<u>Einstein (1905):</u> A fény részecskeként viselkedik, részecskéi a fotonok, melyek energiája $E = hf$. Ez az energia csak egy elektronnak adódik mind oda, amellyel a foton kölcsönhatásba lép. Nem oszlik szét a környező elektronok közt.

Einstein fotoelektromos egyenlete (Nobel-díjat kapott miatta): $hf = W_{ki} + \frac{1}{2} m_e v^2$

W_{ki}: fémre jellemző kilépési munka (egy e^- kiszabadításához szükséges energia).
m_e: elektron tömege

12. feladat

<u>Határfrekvencia:</u>
A foton összes energiája a kilökésre fordítódik, nem marad fel kinetikus energia: $hf_0 = W_{ki}$

A foton lendülete

Az Einstein-féle tömeg-energia ekvivalencia alapján: $E = mc^2$.
A foton energiája: $E = hf$

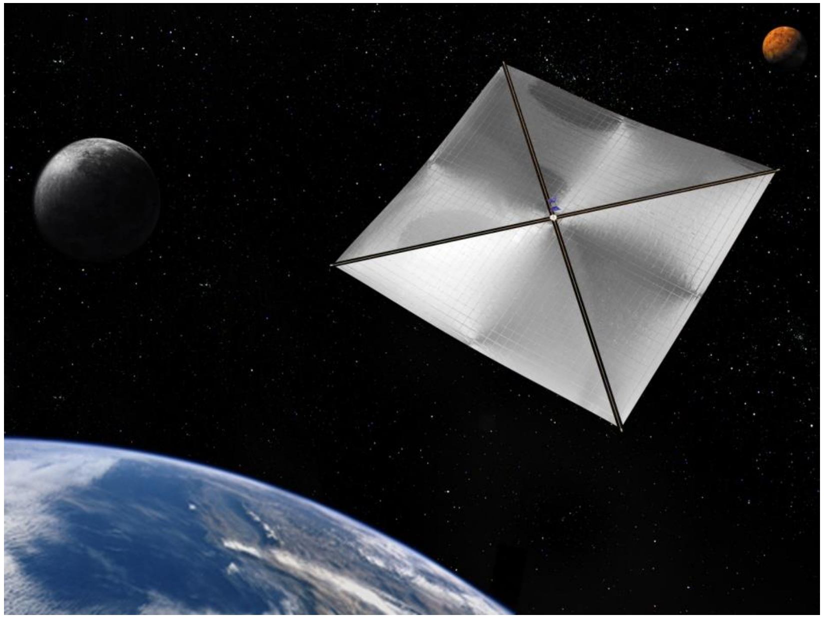
Tehát a fotonhoz rendelhetünk egy tömeget (nem a nyugalmi tömeg, mert az nincs neki!):

$$m_f = \frac{E_f}{c^2} = \frac{hf}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}$$

Ezt a foton c sebességével megszorozva kapjuk a **foton lendületét**: $p_f = m_f c = \frac{h}{\lambda c} c = \frac{h}{\lambda}$

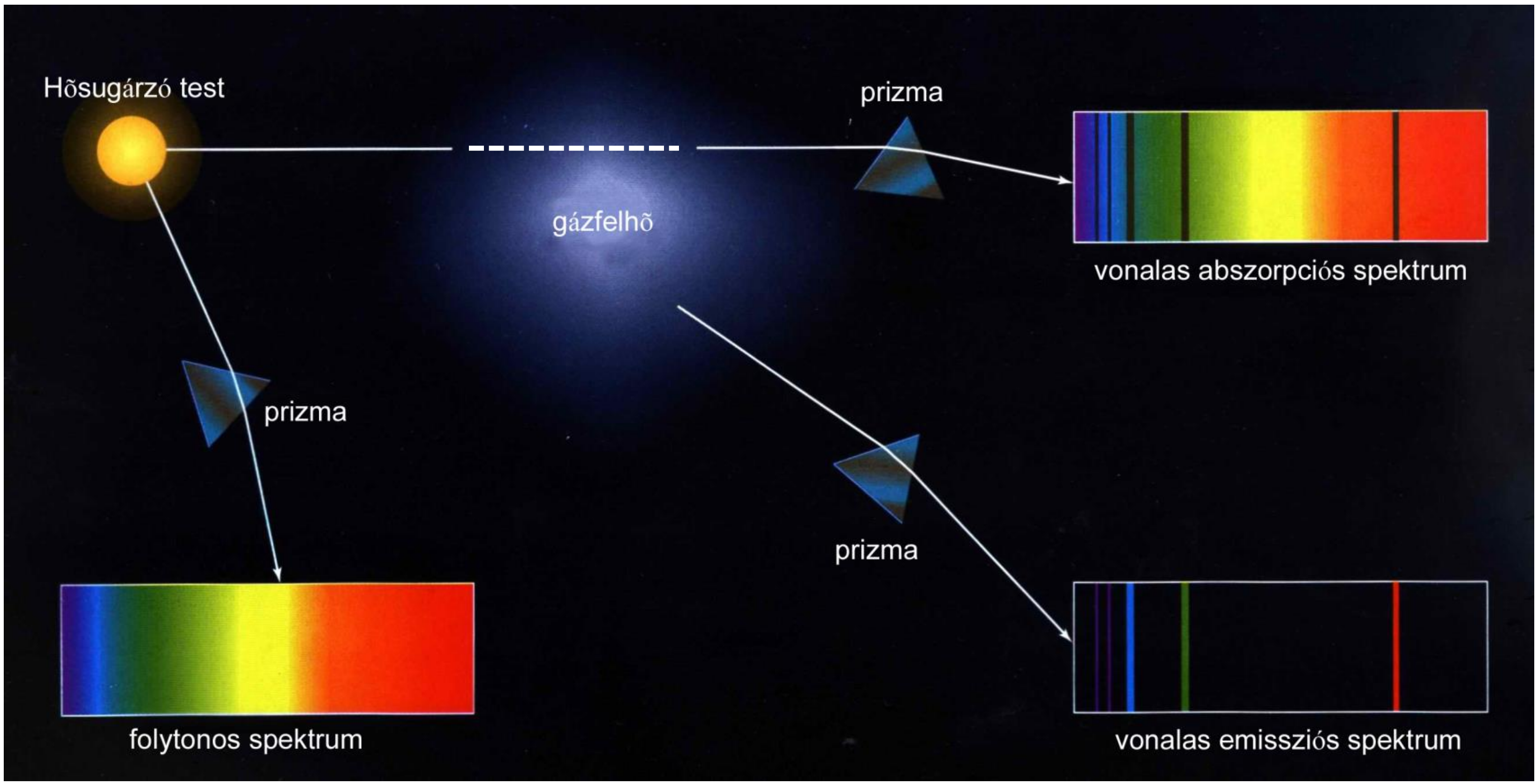
Ez a mennyiség a fontos akkor, amikor a foton részecskéken szóródik (Compton-szórás), illetve emiatt a **foton nyomást fejt ki** a felültre, ami őt elnyeli vagy visszaveri.

A fény nyomását használva vitorlázhatunk az űrben.



Gázok emissziós és abszorpciós színképe

Szilárd testet folytonos spektrumú hősugárzásával ellentétben atomos gázok vagy gőzök csak bizonyos frekvencián sugároznak (emisszió), illetve bizonyos frekvenciájú sugárzást elnyelnek (abszorpció).



A színkép vonalai egyfajta ujjlenyomatként használhatók és segítségükkel távoli testek anyagának összetétele határozható meg.

Gázok színképének magyarázata - Bohr-posztulátumok

A jól meghatározott frekvenciájú kisugárzott, illetve elnyelt fotonokból arra lehet következtetni, hogy az atomokban csak bizonyos nagyságú energia átmenetek lehetségesek.

<u>Bohr-posztulátumok:</u>

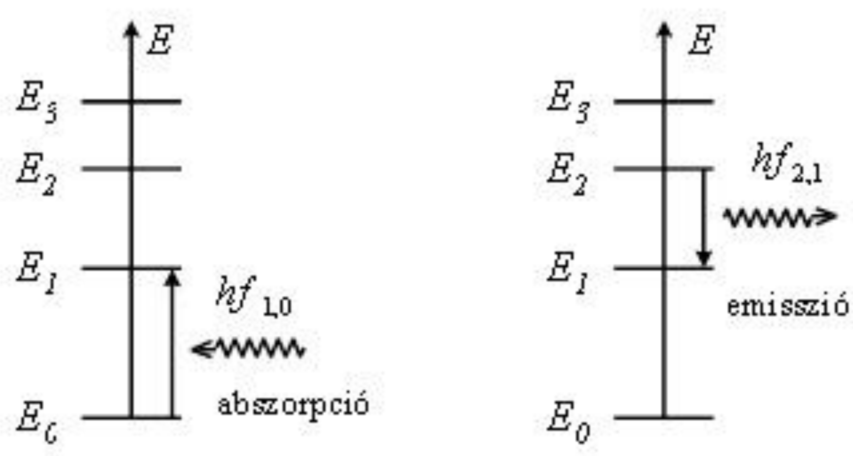
• Az atomokban az elektronok csak diszkrét energiaszinteken $E_1, E_2, \ldots, E_i$ tartózkodatnak és ezeken a stacionárius pályákon nem sugároznak.

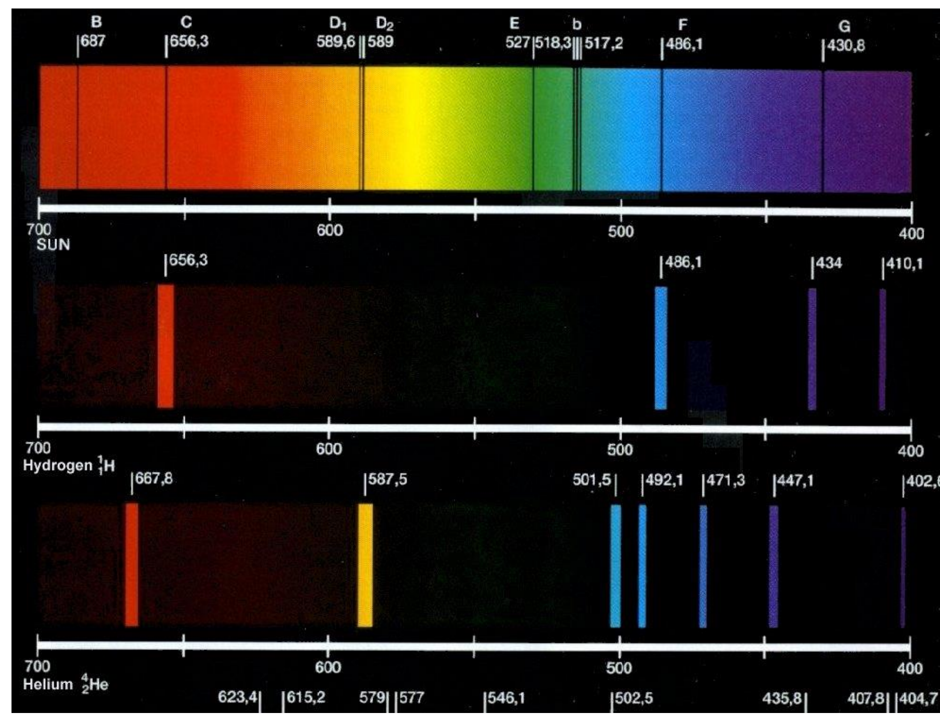
• Az atomok csak akkor sugároznak (emisszió) ha az elektron egy magasabb energiájú pályáról egy alacsonyabbra kerül.

Az emisszió fordítottja az abszorpció.

Bohr-féle frekvencia feltétel:

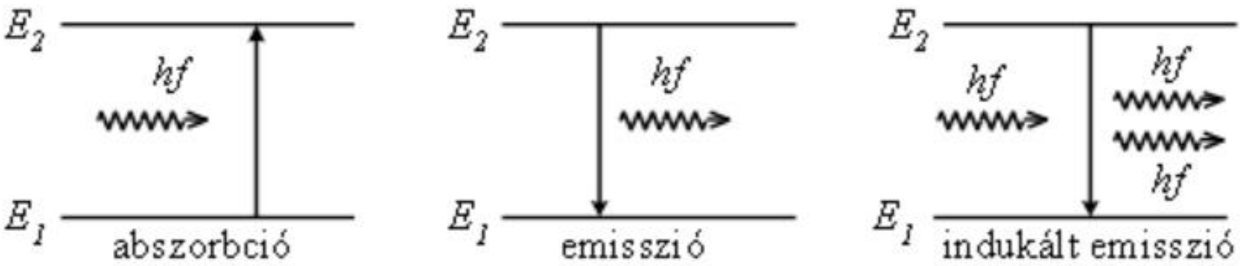
$$E_i - E_j = hf_{ij}$$





A lézer működése

<u>LASER:</u> Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (fényerősítés indukált emisszióval)
Az indukált emisszió esetében a legerjesztődés és az emisszió nem spontán történik, hanem azt egy ugyanolyan energiájú foton váltja ki (**indukálja**). Az emittált foton ugyanabban az irányban halad, mint az indukáló foton és fázisa is ugyanaz (**koherens**).

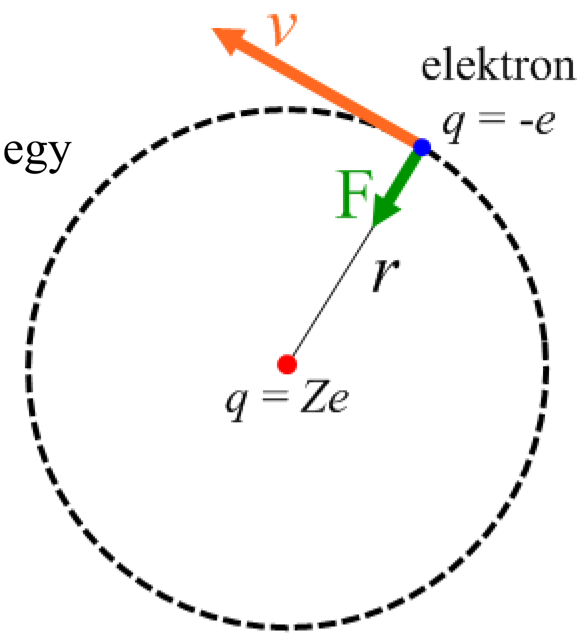


<u>Működés:</u> Energia bepumpálással elérik, hogy több elektron legyen a gerjesztett, mint az alacsony energiaszinten (**populáció inverzió**). Ekkor több indukált emisszió lesz, mint abszorpció, tehát a fény erősödik.

<u>Tulajdonságok:</u> monokromatikusság (azonos frekvencia), kismértékű divergencia, nagyfokú koherencia, nagy felületi teljesítménysűrűség, nagy spektrális teljesítménysűrűség (mivel csak egy frekvencia van).

A Hidrogén* atom Bohr modellje

A modellnek szolgáltatnia kell az elektron diszkrét E_n energiáit.
Az elektron pálya-impulzusmomentuma: $L = mvr$
Az energiához hasonlóan ez is kvantált: $L = nh/(2\pi) = n\hbar$
*Nem csak hidrogénre, hanem Z rendszámú ionra is jó, amely egy elektront tartalmaz csupán (hidrogénszerű):



$$\frac{kZe^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \quad kZe^2 = mvr \cdot v = n\hbar \cdot v$$

$$v = \frac{kZe^2}{n\hbar}$$

Az elektron teljes (mechanikai) energiája:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$E_n = -\frac{1}{2}m{v_n}^2 = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -E^*Z^2\frac{1}{n^2}$$

$$E^* = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 2{,}18\ \mathrm{aJ}$$

A Hidrogén atom energiaszintjei

Az előzőleg levezetett képletből $Z = 1$ esetben kapjuk a hidrogén energiaszintjeit:

$$E_n = -E^* \frac{1}{n^2} \qquad E^* = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 2{,}18\ \mathrm{aJ}$$

Az emissziós és abszorpciós frekvenciákra:

$$f_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{E^*}{h}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

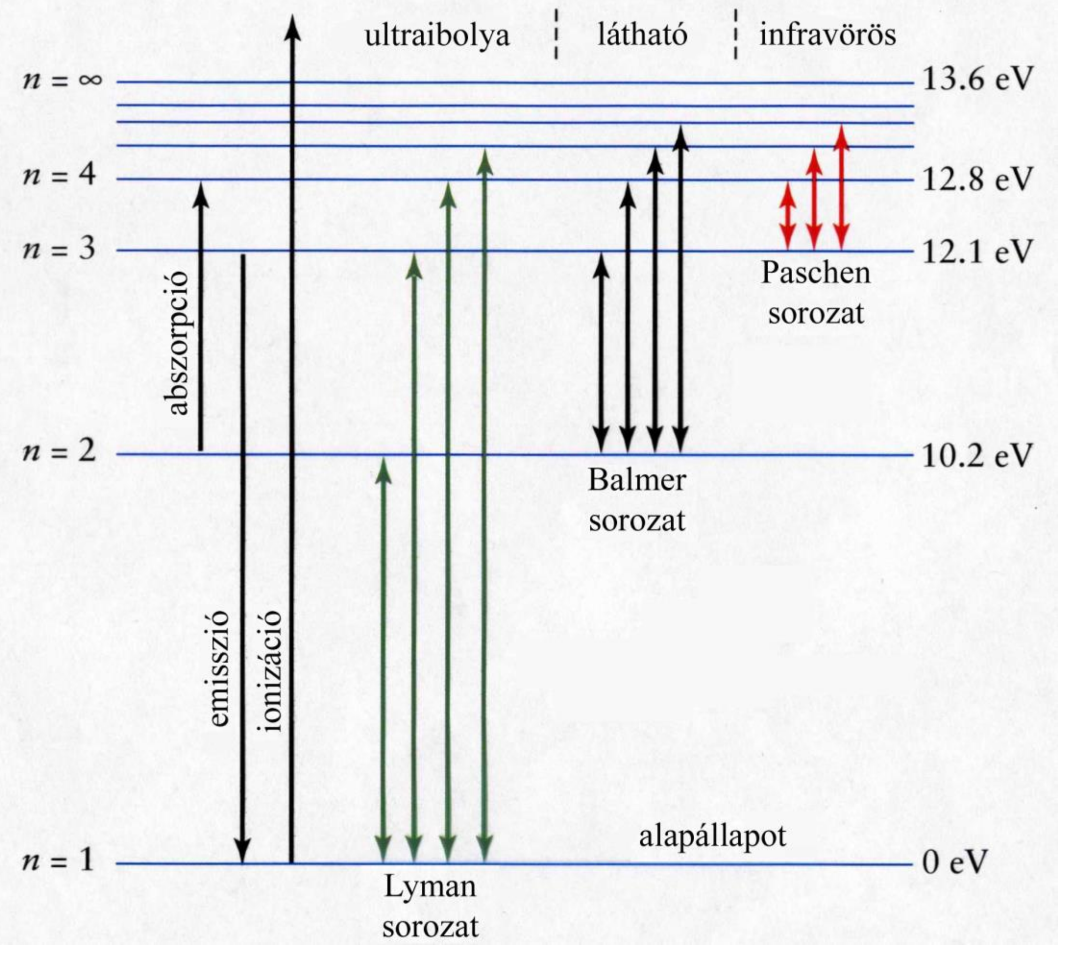
$$f_{nm} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

R: Rydberg-állandó

Lyman-sorozat: $f_{n1} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Balmer-sorozat: $f_{n2} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$

Paschen-sorozat: $f_{n3} = R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)$



De Broglie-féle anyaghullámok

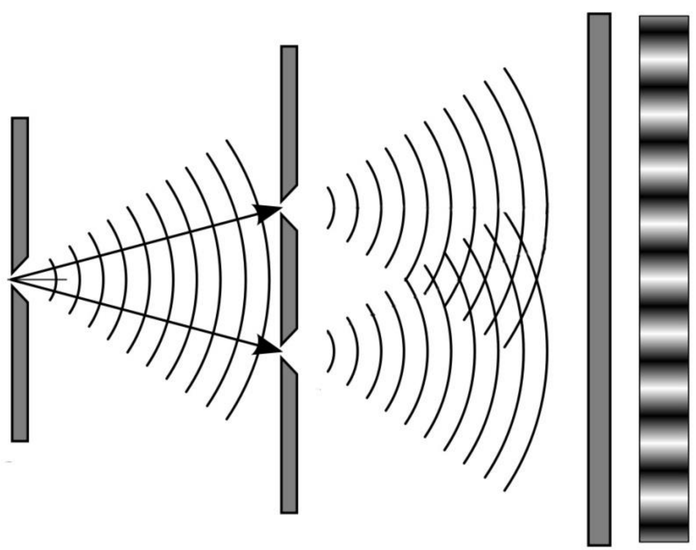
Láttuk, hogy a fény viselkedhet hullámként is és részecskeként is. De Broglie felvetette, hogy ez a kettős természet talán az anyagi részecskékre is igaz.
Feltételezve, hogy a fotonra levezetett lendület-hullámhossz kapcsolat általános érvényű, egy részecskéhez (pl. elektronhoz) rendelhető hullámhossz:

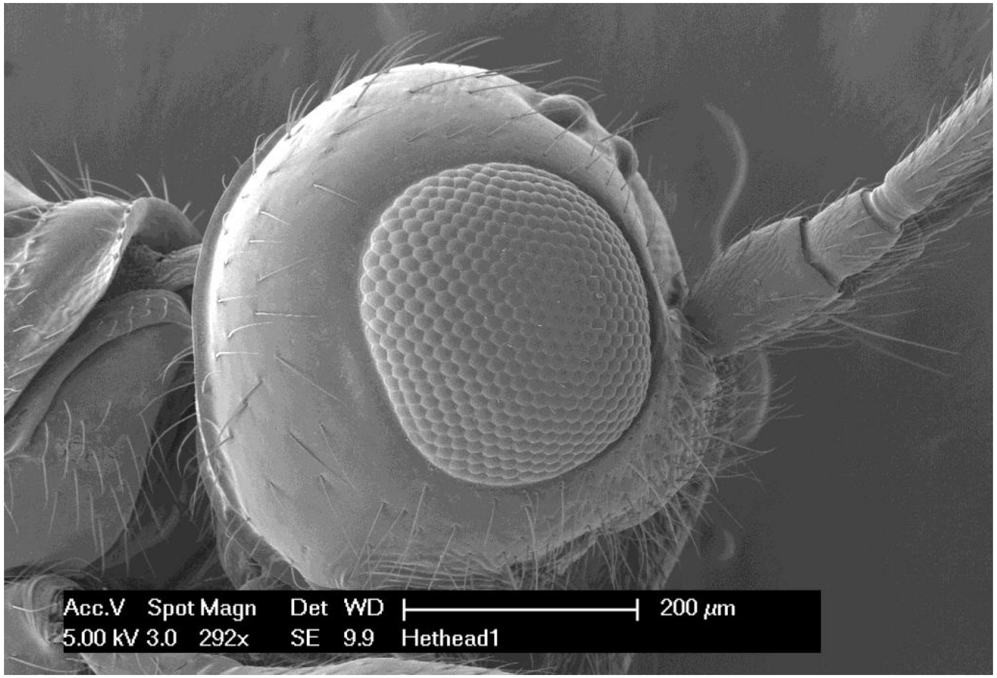
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

A kettősrés kísérletet elvégezve ugyanolyan interferenciaképet kaptak elektronokra mint fotonokra. Az interferenciakép csakis a hullámtulajdonságokkal magyarázható.

13. feladat

Az elektronmikroszkóp nem működhetne ha az elektron nem viselkedne hullámként.

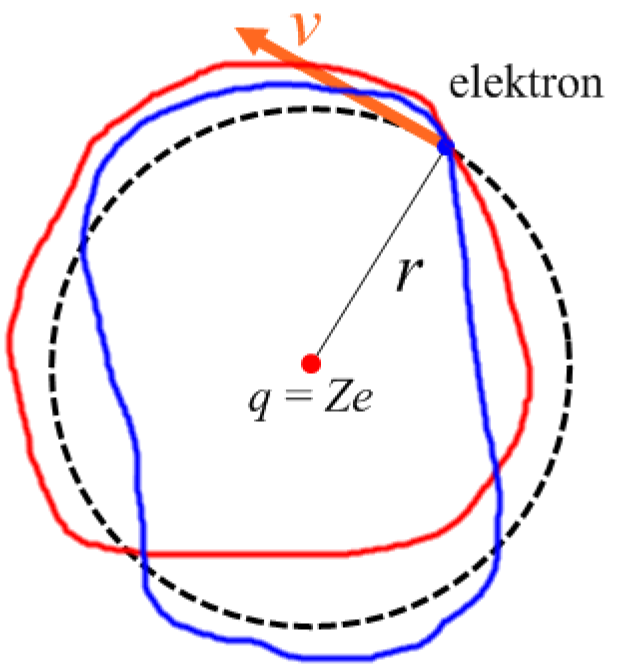




De Broglie hipotézise az atomi elektronra

Stacionárius esetben az atommag körül keringő elektron egy állóhullámnak felel meg.

Tehát a kör kerülete a hullámhossz egész számú többszöröse kell, hogy legyen:



$$n\lambda = 2\pi r$$

Beírva a De Broglie hullámhosszt: $\dfrac{nh}{mv} = 2\pi r$

Az elektron pálya-impulzusmomentumára tehát:

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

A De Broglie hipotézis megmagyarázza az impulzusmomentum kvantált természetét!