

Határfeltételek

Ampère-féle gerjesztési törvény: $\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0^*$
 (*amennyiben a határfelületen nem folynak áramok)

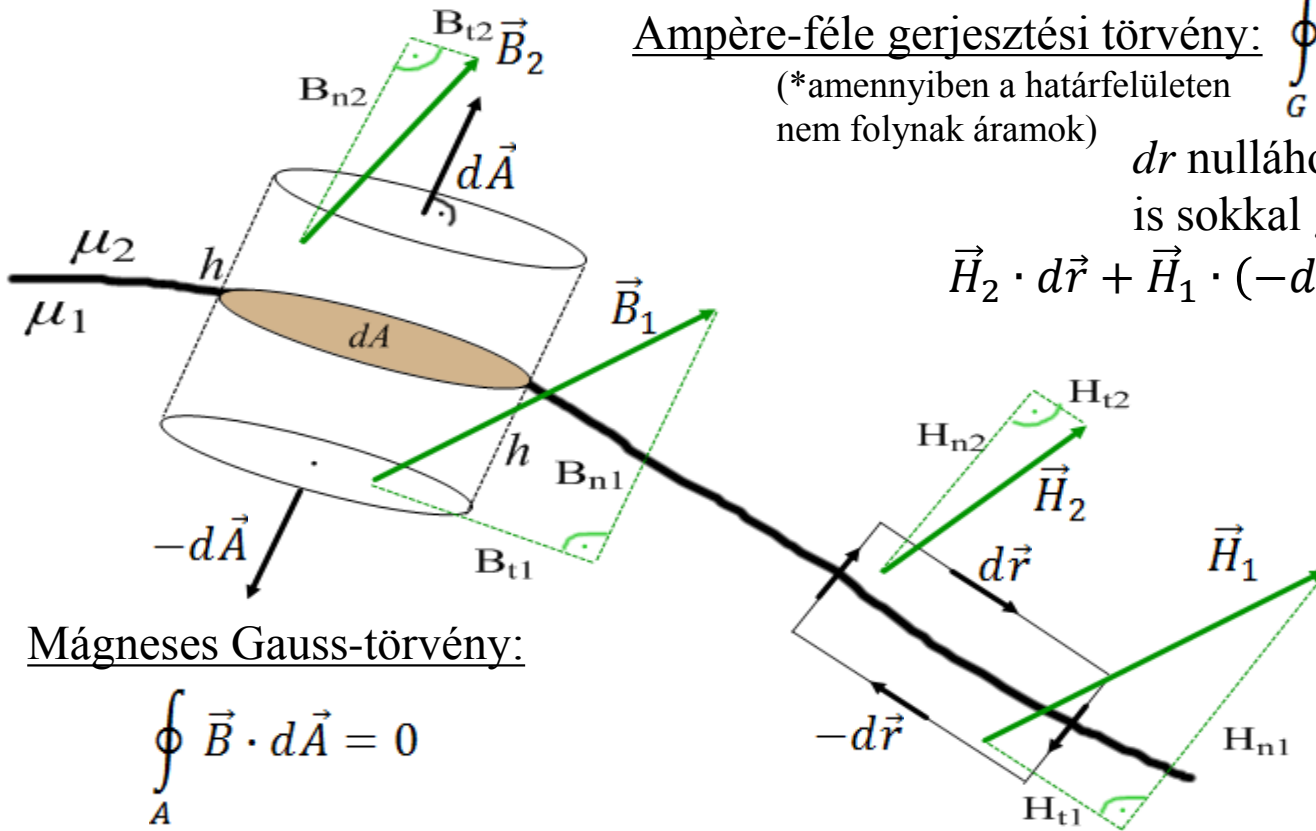
dr nullához tart, h még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{H}_2 \cdot d\vec{r} + \vec{H}_1 \cdot (-d\vec{r}) = H_{2t}dr - H_{1t}dr = 0$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

dA nullához tart, h még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{B}_2 \cdot d\vec{A} + \vec{B}_1 \cdot (-d\vec{A}) = B_{2n}dA - B_{1n}dA = 0$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Biot-Savart törvény

Egy $I d\vec{s}$ áramelem az \vec{r} helyvektorral jelzett P pontban a következő mágneses indukciót hozza létre:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

A $\{d\vec{s}, \vec{r}, d\vec{B}\}$ jobbsodrású rendszert alkot (vektorszorzat).

Használva az \vec{r} irányú egységvektort: $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{e}_r$$

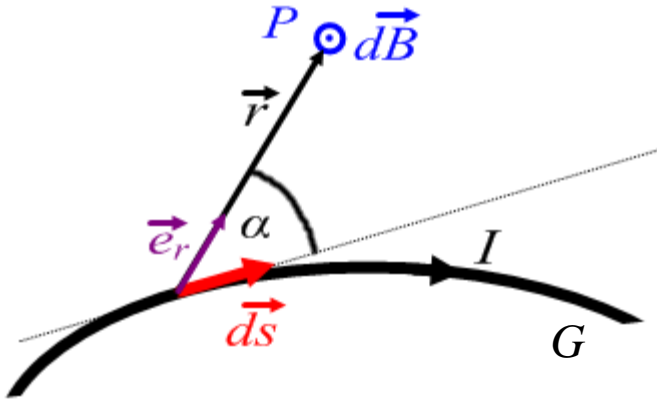
A törvény ezen alakja vákuum vagy levegő esetén érvényes, ahol: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Ha a közegtől független alakot szeretnénk, akkor felírhatjuk a mágneses térerősségre is:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{e}_r$$

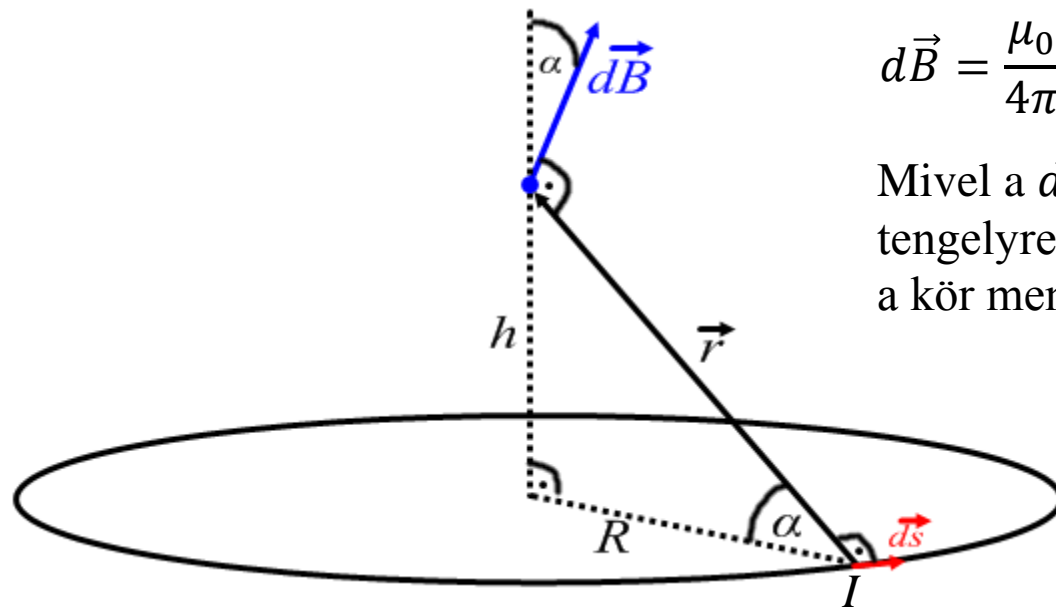
A G görbe által jelzett kiterjedt áramjárta vezető mágneses indukciójára:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_G \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{illetve} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_G \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{ha a } G \text{ görbe zárt (köráram)}$$



Biot-Savart törvény alkalmazása köráramra

Számítsuk ki, hogy milyen mágneses indukciót hoz létre egy I árammal árt R sugarú kör alakú vezető a középpontján átmenő tengely mentén:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

Mivel a $d\vec{s}$ érintőirányú, a középponton áthaladó tengelyre mutató \vec{r} vektor erre merőleges lesz a kör mentén végighaladva mindenütt:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I ds \cdot r \cdot \sin 90^\circ}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I ds}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} ds$$

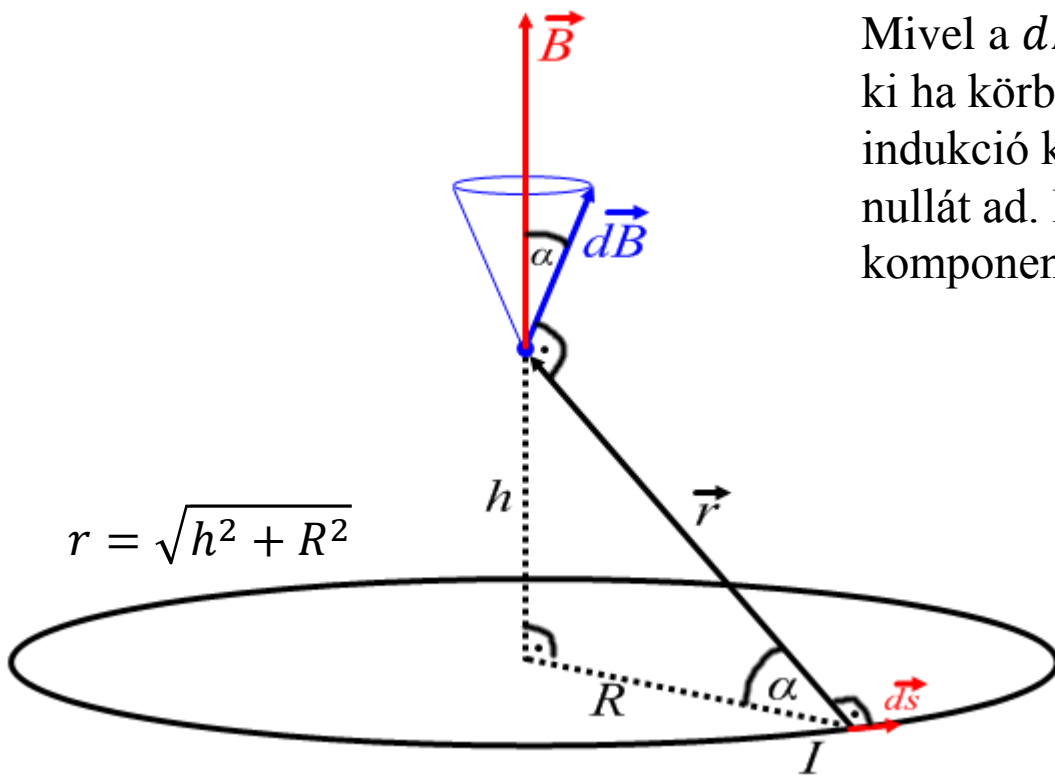
Az r távolság a körvonal minden pontjára ugyanaz: $r = \sqrt{h^2 + R^2}$

Tehát a dB járulék minden pontra ugyanakkora nagyságú a kör mentén végighaladva.

Írányukat tekintve viszont a $d\vec{B}$ vektorok egy α nyílásszögű kúpot rajzolnak ki, a merőleges szárú szögek alapján:

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Köráram mágneses tere



Mivel a $d\vec{B}$ vektorok egy α szögű kúpot rajzolnak ki ha körbehaladunk a köráram mentén, az eredő indukció körárammal párhuzamos komponense nullát ad. Így aztán csak a tengellyel párhuzamos komponenssel kell számolni:

$$dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} ds \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Az eredő mágneses indukció:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi(h^2 + R^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \oint_G ds$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(h^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi = \frac{2\mu_0 I R^2 \pi}{4\pi(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

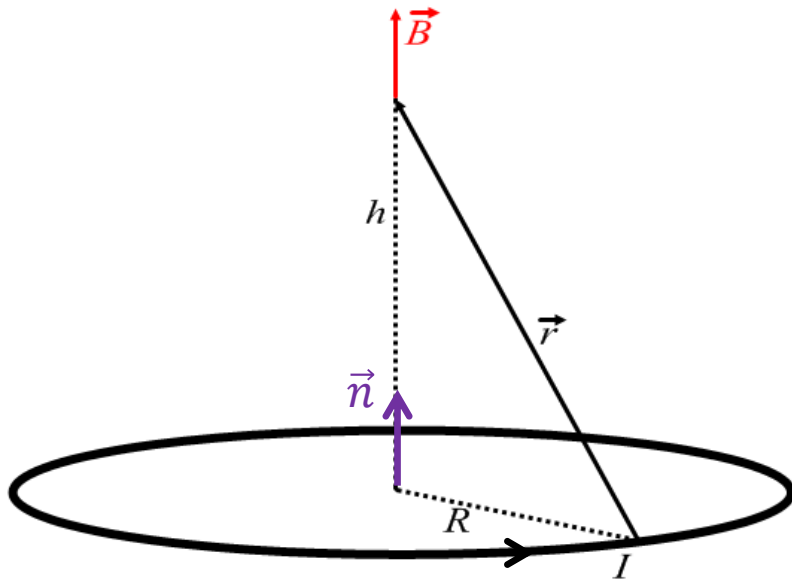
Egyszerűsítve az eredő indukció:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

A kör középpontjában ($h = 0$) nézve:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Mágneses dipólus által létrehozott mágneses tér



Figyelembe véve, hogy az R sugarú köráram mágneses dipólmomentuma:

$$\vec{m} = IA \cdot \vec{n} = IR^2\pi \cdot \vec{n}$$

Az előző oldalról:

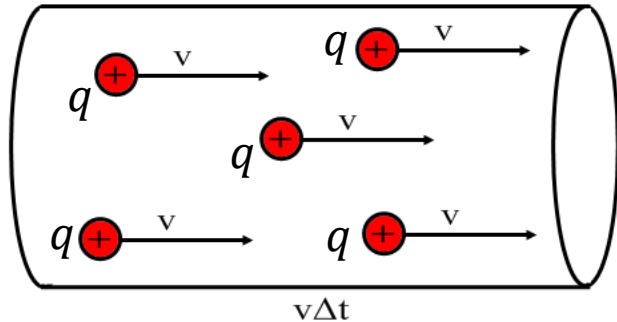
$$B = \frac{2\mu_0 IR^2\pi}{4\pi(h^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

A köráramtól nagy távolságra ($h \gg R$):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi h^3}$$

Az irányokat is figyelembe véve: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi h^3} \vec{m}$

Mozgó ponttöltés által létrehozott mágneses tér



Az elektromos áramerősség definícióját felhasználva:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{\Delta t}$$

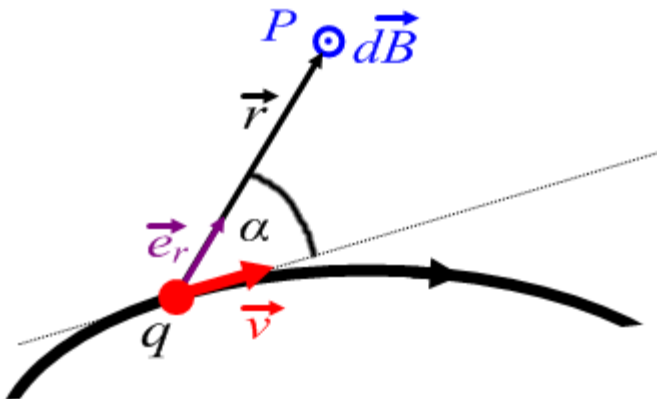
Az áramelem hosszára: $\Delta s = v\Delta t$

Ezek segítségével a Biot-Savart törvény alapján meghatározható a mozgó ponttöltések által keltett mágneses tér:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta \vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Nq}{\Delta t} \frac{\vec{v} \Delta t \times \vec{r}}{r^3}$$

Egyszerűsítve és N -el osztva, az egyetlen töltés által okozott mágneses indukció:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \vec{v} \times \vec{e}_r$$



Az elektromágneses indukció jelensége

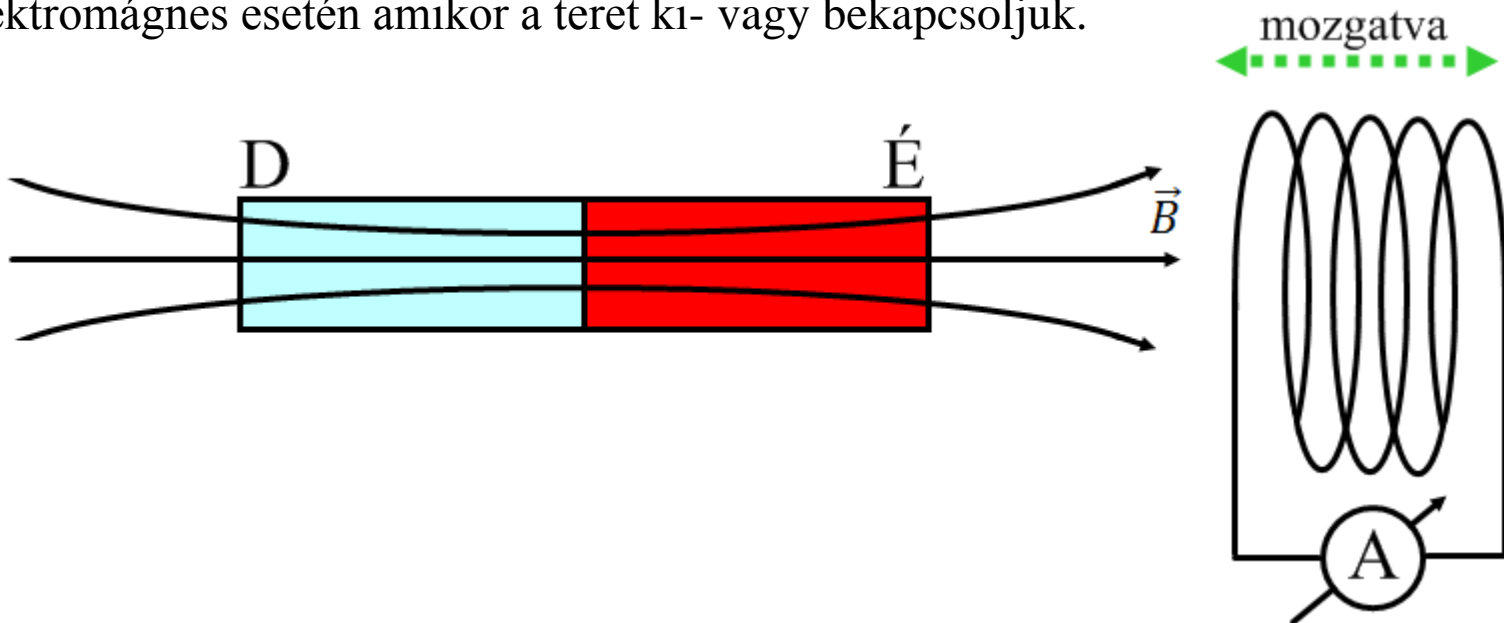
Korábban láttuk, hogy az elektromos áram hatására mágneses tér keletkezik (Ampère-féle gerjesztési törvény)

Kérdés, hogy vajon ez megfordítható-e, és a mágneses tér hatására keletkezik-e áram:

Ha egy tekercs állandó mágneses térben nyugalomban van akkor semmi nem történik.

Viszont az árammérő kilendül akkor amikor:

- a tekercset vagy a mágnezt mozgatjuk (egymáshoz képest), illetve forgatjuk.
- elektromágnes esetén amikor a teret ki- vagy bekapcsoljuk.



Mozgási indukció

Ha egy vezetőt mágneses térben mozgatunk akkor a benne lévő töltésekre Lorentz-erő hat.

Ez az az idegen erő amely a töltések mozgatásáért felelős: $\vec{F}_* = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

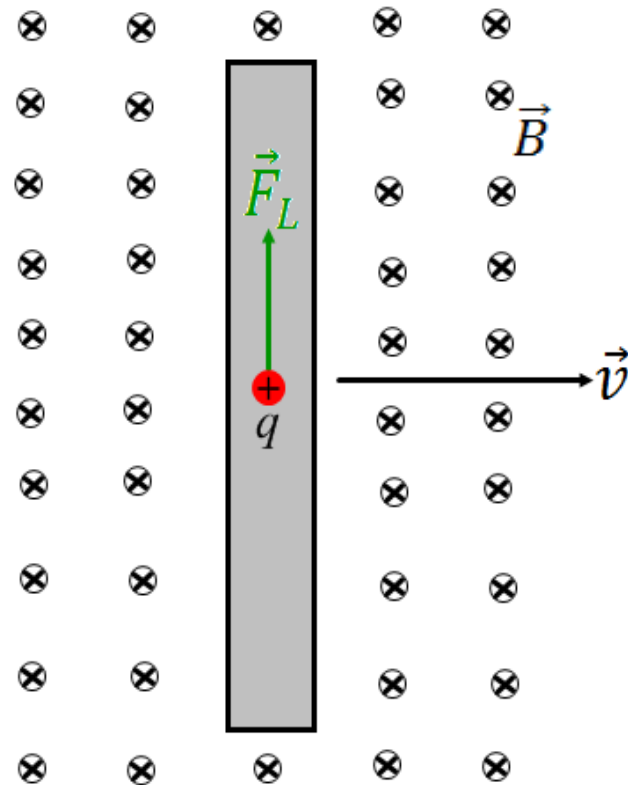
Tehát az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$

A **Neumann-törvény** megadja a mozgó vezető A és B pontja között indukálódó elektromotoros erőt amint az a mágneses térben mozog:

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Ebben a jobbra látható egyszerű esetben, ha a rúd hossza l , az elektromotoros erő:

$$\varepsilon = vBl$$



Alkalmazás: Lineáris generátor

Ha a mágneses térben mozgó vezető végeit összekötjük egy párhuzamos sínpárral egy R ellenálláson keresztül, akkor a körben áram folyik.

Az áramerősség:
$$I = \frac{\varepsilon_{AB}}{R} = \frac{vBl}{R}$$

Az áramjárta vezetőre hat az Ampère-erő amit egy húzóerővel kell kompenzálnunk.
Mechanikai teljesítményből elektromos teljesítmény a fogyasztón.

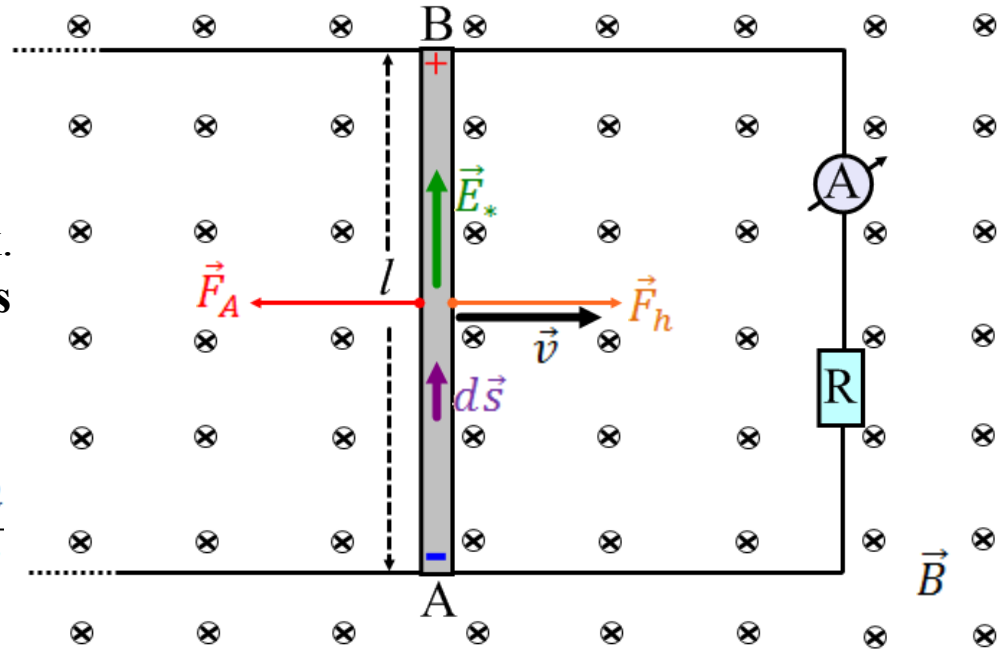
Legyen h a mozgó rúd és az ellenállás közötti távolság. Ekkor: $v = -\frac{dh}{dt}$

A **mágneses indukciófluxus** ebben az egyszerű esetben: $\Phi = BA = Blh$

A mágneses indukciófluxus időderiváltja pedig:
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B \frac{dA}{dt} = -Blv = -\varepsilon_{AB}$$

Faraday és Lenz törvénye: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a hurok által körülfogott mágneses indukciófluxus változási gyorsaságának ellentettjével (másképpen az Ampère-erő segítene!)



Alkalmazás: Váltakozó áramú generátor

Vezető keret állandó ω szögsebességgel forog egy homogén mágneses térben.

Ha kezdetben $\vec{n} \parallel \vec{B}$ akkor: $\alpha = \omega t$

A mágneses indukciófluxus az idő függvényében:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \cos \alpha = BA \cos \omega t$$

A Faraday-Lenz törvényt felhasználva:

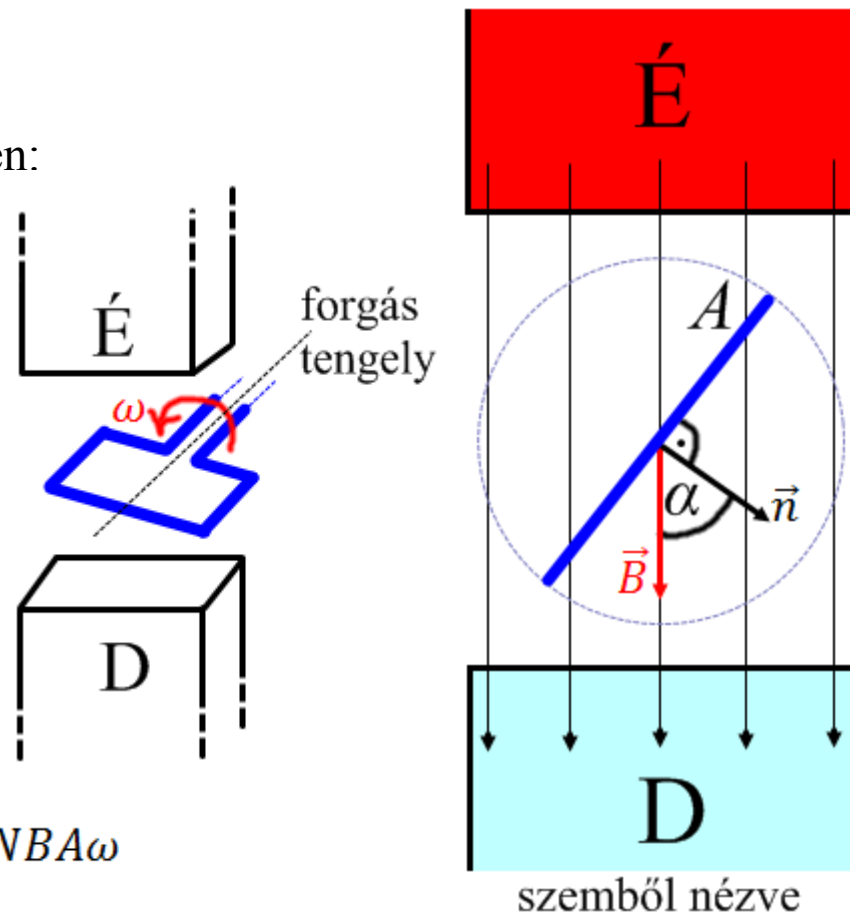
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega \sin \omega t$$

Ha a keret N menetből áll:

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t$$

Az elektromotoros erő maximális értéke: $\varepsilon_0 = NBA\omega$

Tehát az indukált elektromotoros erő: $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$



[ANIMÁCIÓ!](#)

A feszültség és áramerősség effektív értéke

A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius (egyen-) áramot jelenti.

Tehát egy periódusidő alatt a fogyasztón az elektromos munkavégzés megegyezik:

$$I_{eff}^2 RT = \int_0^T I^2 R dt$$

Innen R -el egyszerűsítve az effektív áramerősségre: $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$

Szinuszosan változó áramra:

$$\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{I_0^2 T}{2}$$

Tehát az effektív értékekre:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (U = IR)$$

