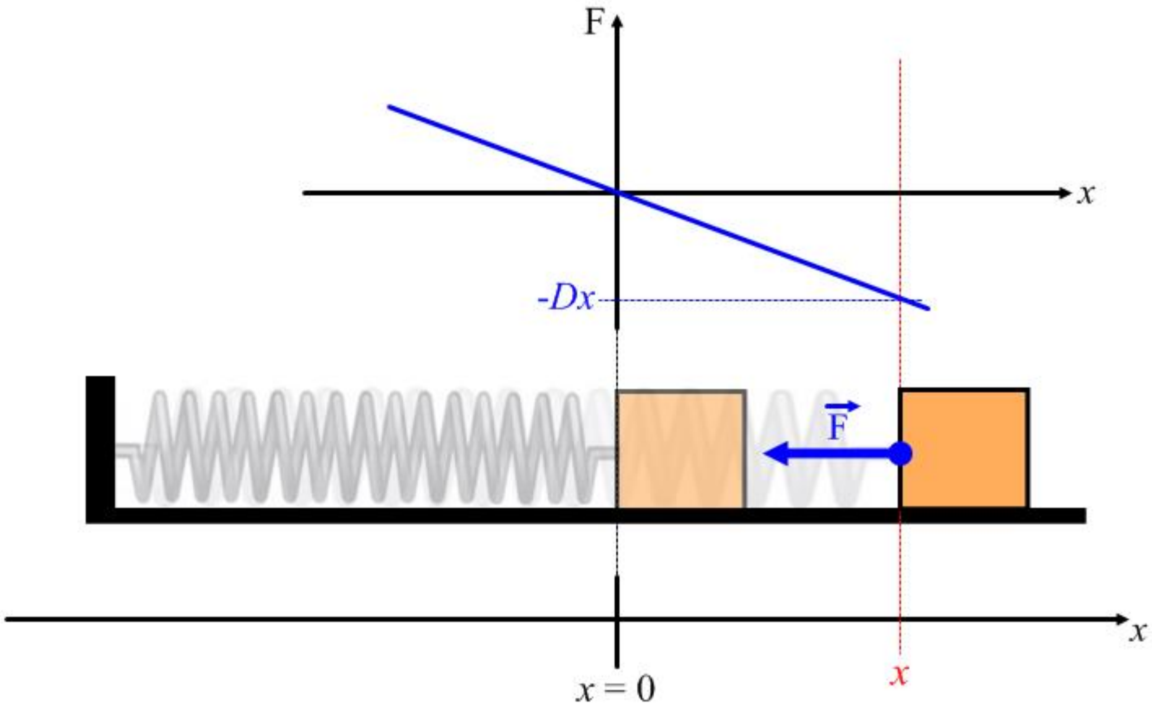
Rezgések és hullámok

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

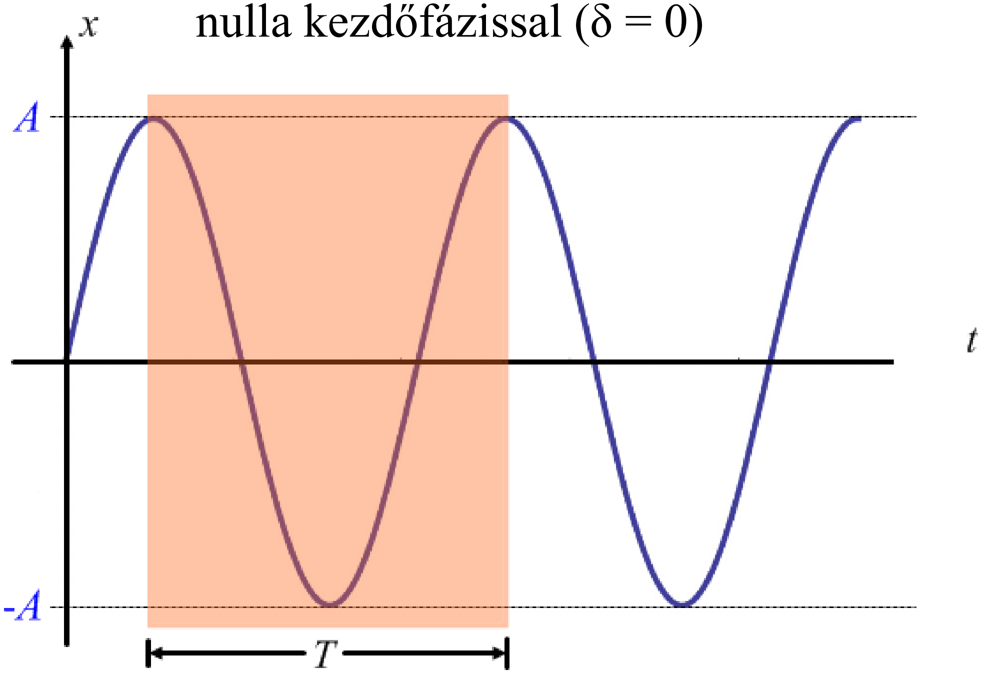
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\begin{cases} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{cases}$

ω: körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal (δ = 0)



$$x(t) = x(t+T)$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

Kinetikus és potenciális energia* - Feladat: 6

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva (δ = 0)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva (δ = 0) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

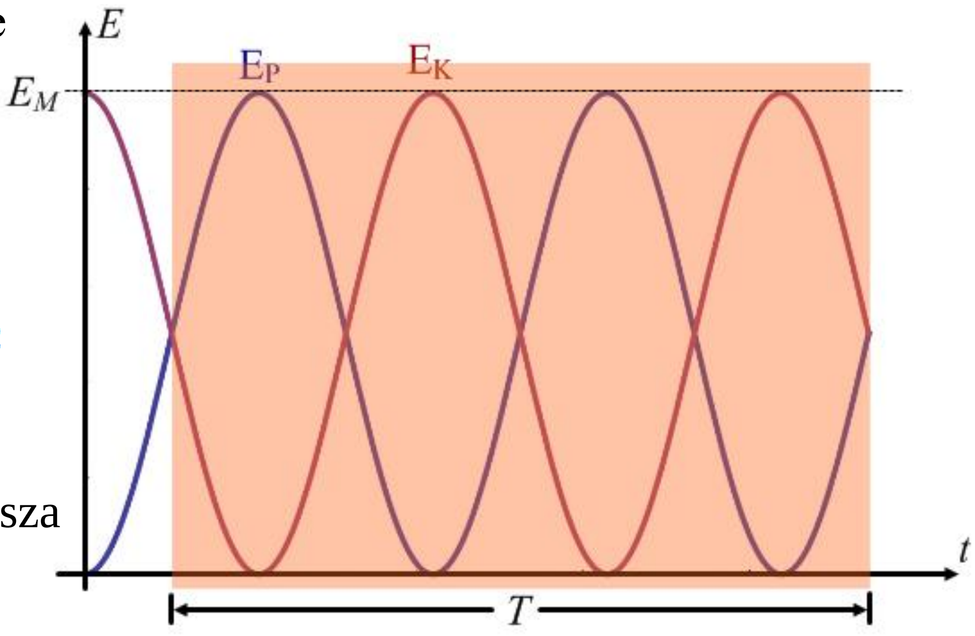
Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

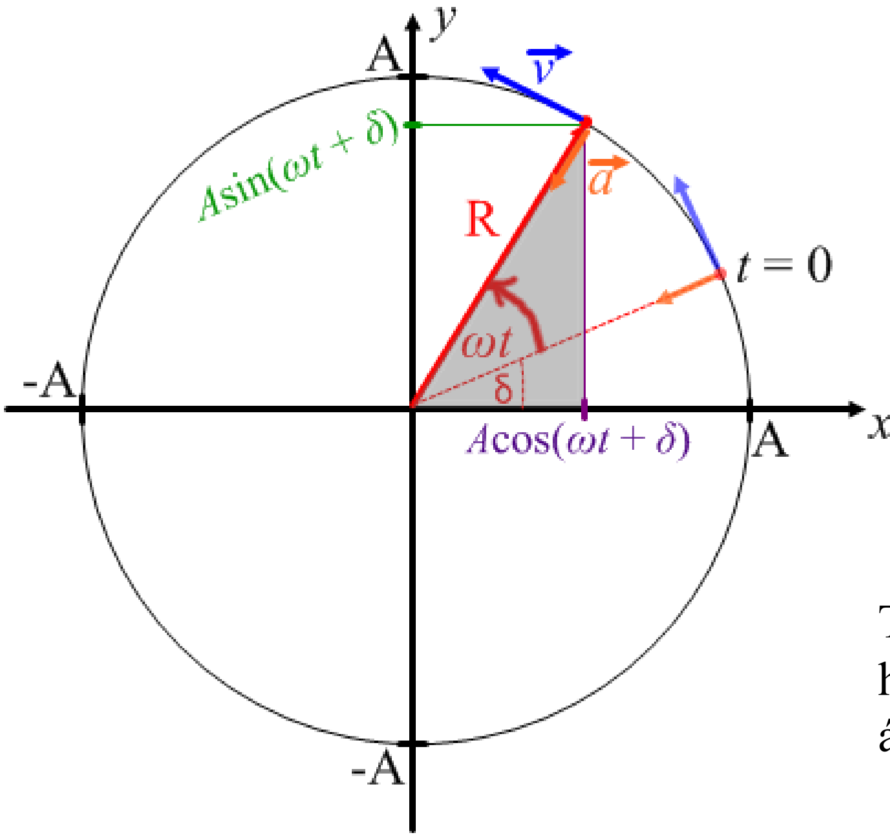
$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$



A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.

Egyenletes körmozgás és harmonikus rezgés kapcsolata

Körmozgás esetén mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.



T: keringési vagy periódusidő
ω: szögsebesség vagy körfrekvencia

Felhasználva a kapcsolatot:

$R = A$
$v_{ker} = R\omega = A\omega = v_{max}$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A = a_{max}$$

Tehát a körmozgás két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevéseként áll elő:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A\sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hogy körmozgás legyen az eredmény, frekvenciák és amplitúdók meg kell egyezzenek, fáziskülönbség pedig π/2 kell legyen. ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

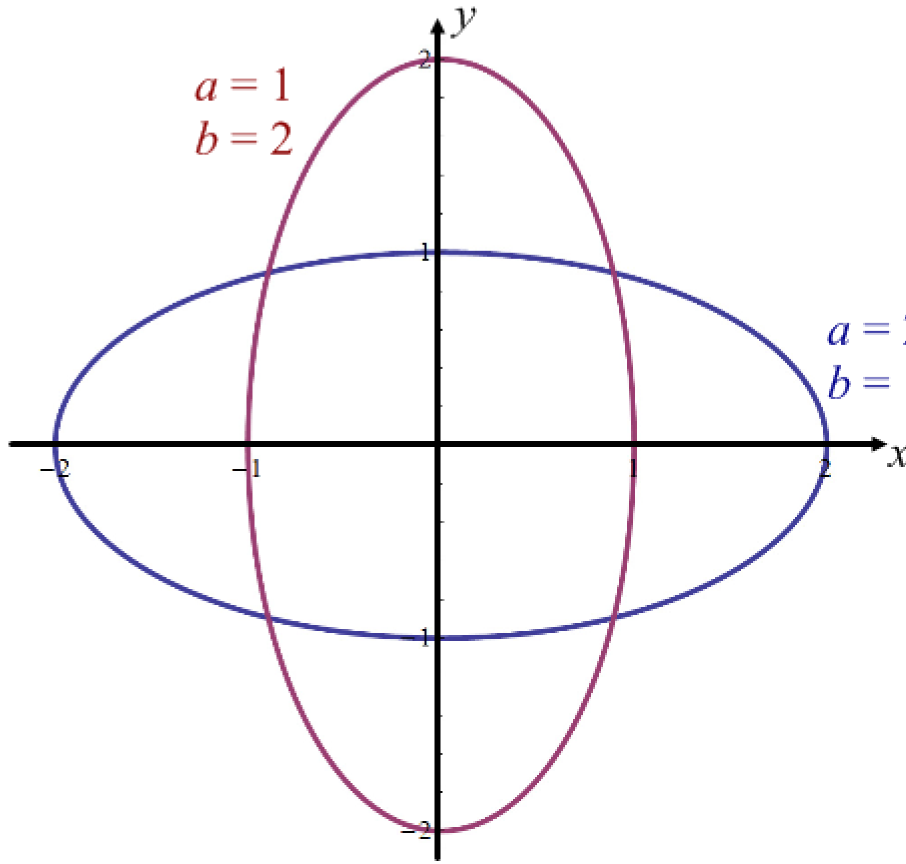
Merőleges rezgések összetevése (többi eset)

Eltérő amplitúdók, π/2 fáziskülönbség

A két merőleges kitérésre: $\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\}$ $\dfrac{x}{a} = \cos(\omega t)$ és $\dfrac{y}{b} = \sin(\omega t)$

frekvenciák azonosak

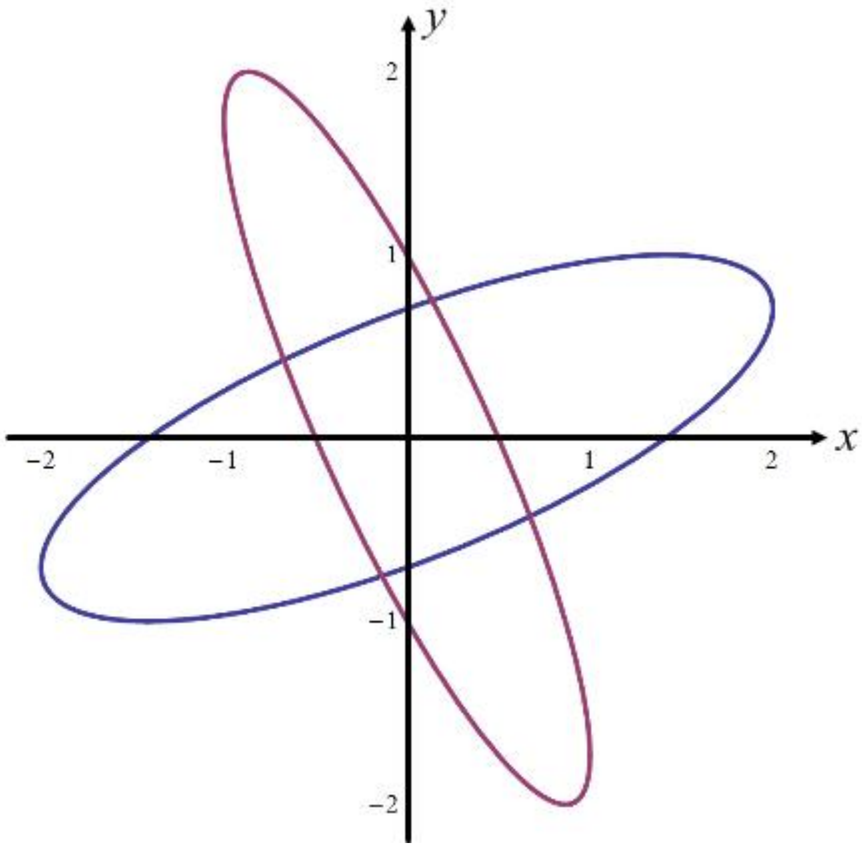
Tehát: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$



Tetszőleges fáziseltérés

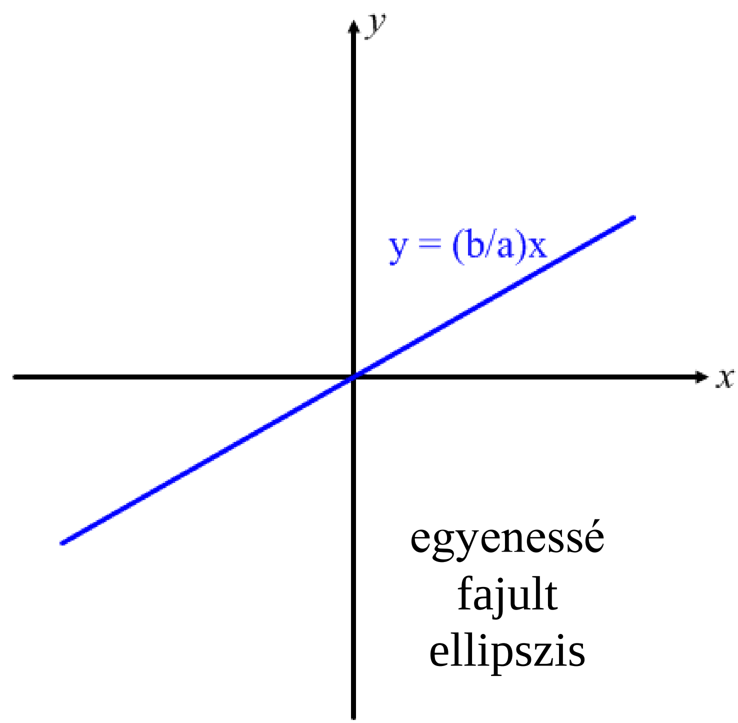
Abban az esetben, ha a frekvenciák azonosak, az amplitúdók nem, és a fáziseltérés bármi:
A mozgás továbbra is **ellipszis** alakú:

viszont torzul és elfordul
-5π/6 illetve -π/4 fáziskülönbség



másik speciális eset: 0 fáziskülönbség
(vagy π)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\sin(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \longrightarrow y = \frac{b}{a}x$$



egyenessé
fajult
ellipszis

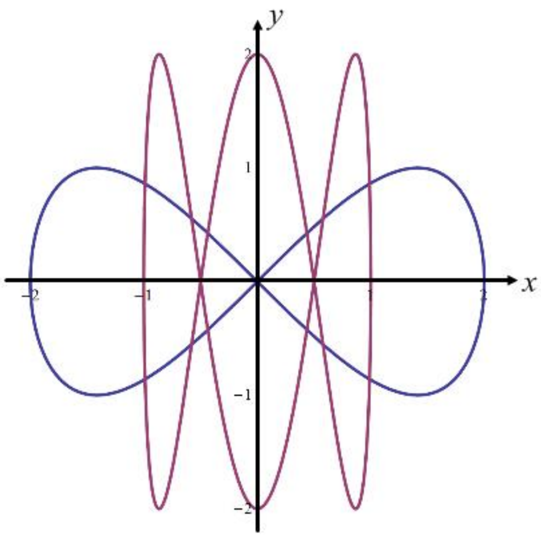
Lissajous-görbék*

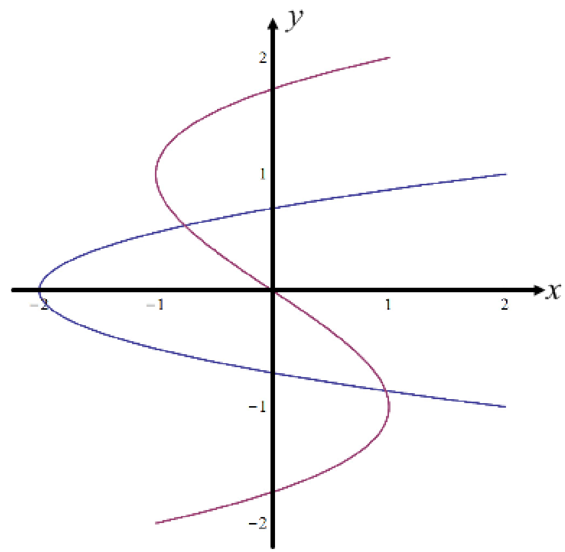
<u>Teljesen általános eset</u>: A frekvenciák sem egyeznek meg.

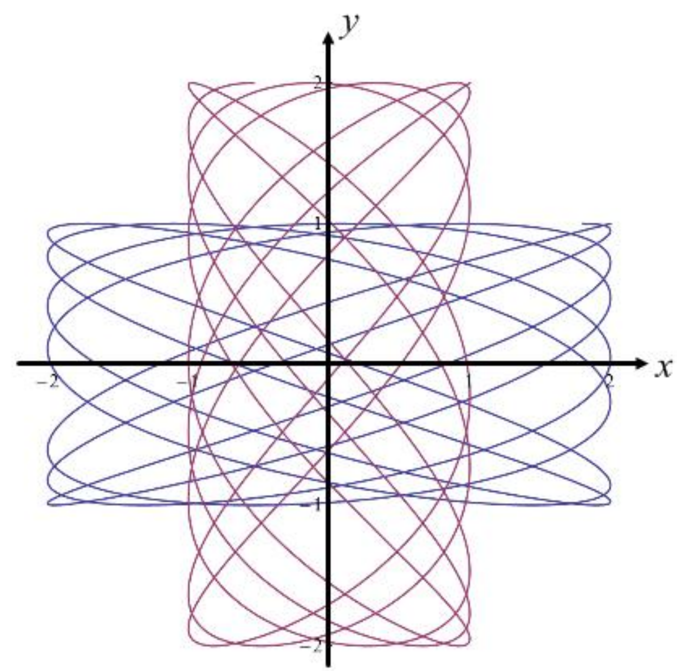
A mozgás **periodikus**, ha a frekvenciák aránya **racionális**
pl. 1/2 vagy 1/3
(y: -π/2 fáziskülönbség)

2 vagy 3
(0 fáziskülönbség)

Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor soha nem zárul a görbe, a mozgás nem periodikus (ismétlődő). pl.
(0 fáziskülönbség) $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$





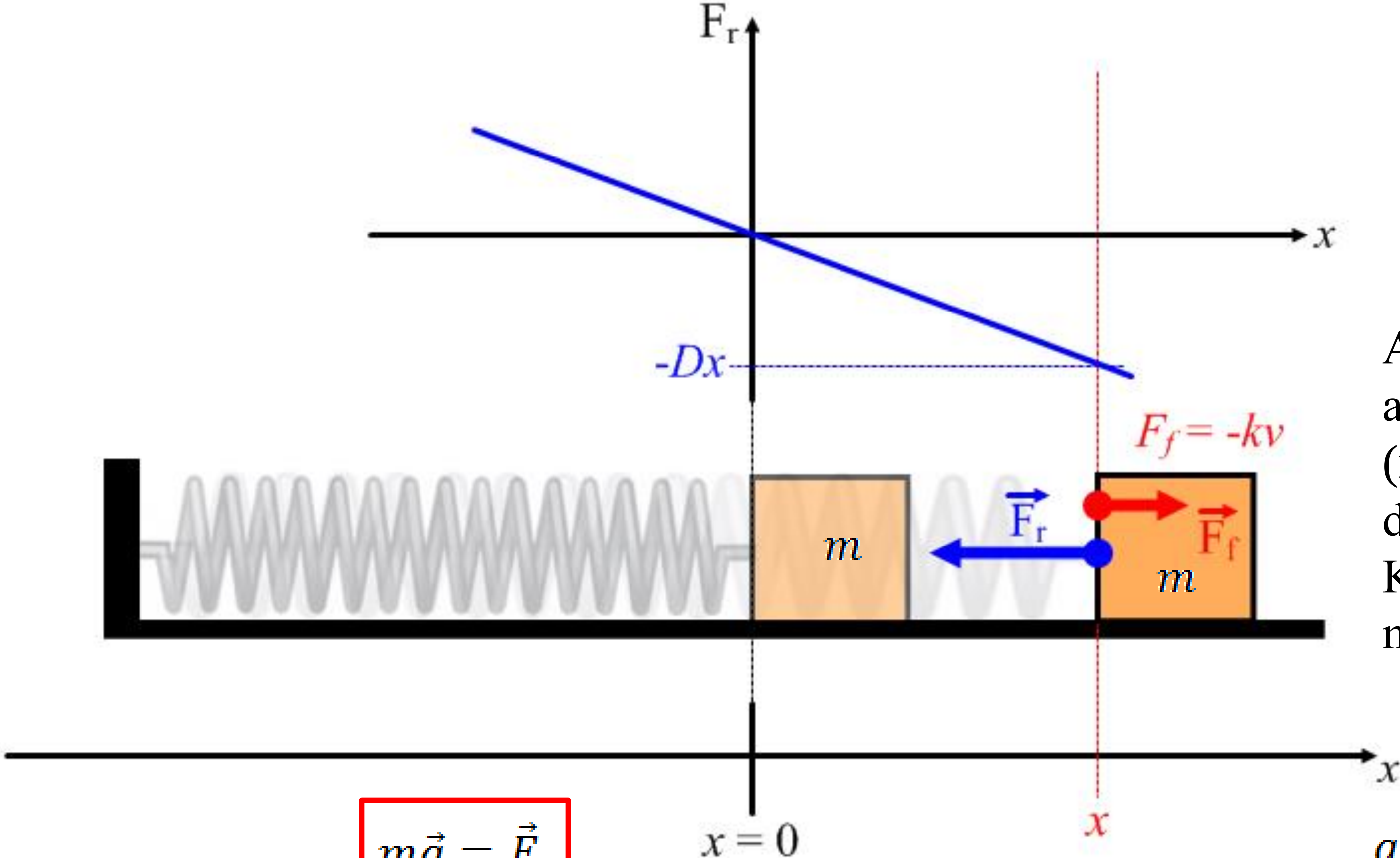


a pálya ismétlődő görbét alkot
a periódusidők legkisebb közös többszöröse múlva
[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!]

a pálya sohasem ismétlődik
(teljesen besatírozná...)

Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak.
A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_e}$$

$a = \ddot{x}$ $\qquad v = \dot{x}$

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás *x* mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ $\frac{D}{m} = \omega_0{}^2$ ω_0 - a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)

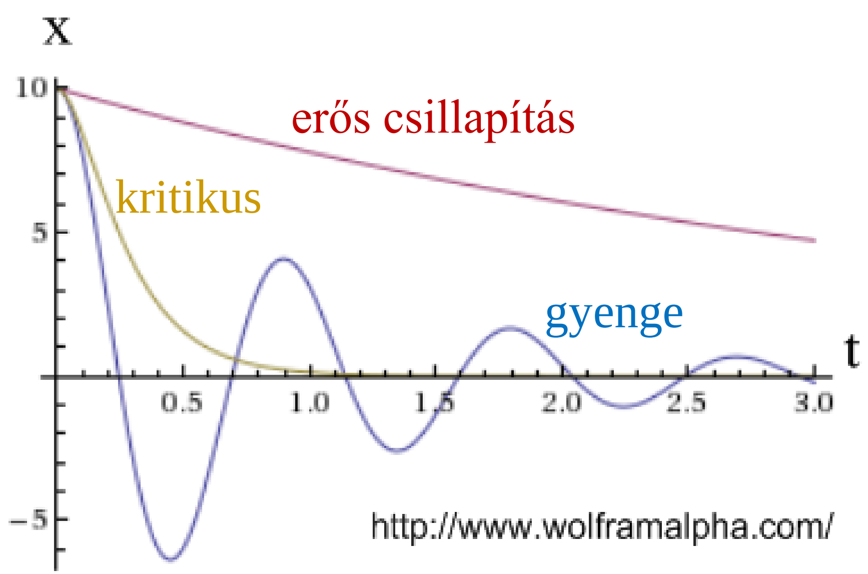
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ $\alpha = \frac{k}{2m}$ α - a csillapítási tényező

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0{}^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0{}^2 = 0$

Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$



<u>Három lehetséges eset</u>

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 > 0$

Gyengén csillapított rezgés

$\alpha^2 - {\omega_0}^2 < 0$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -\alpha \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

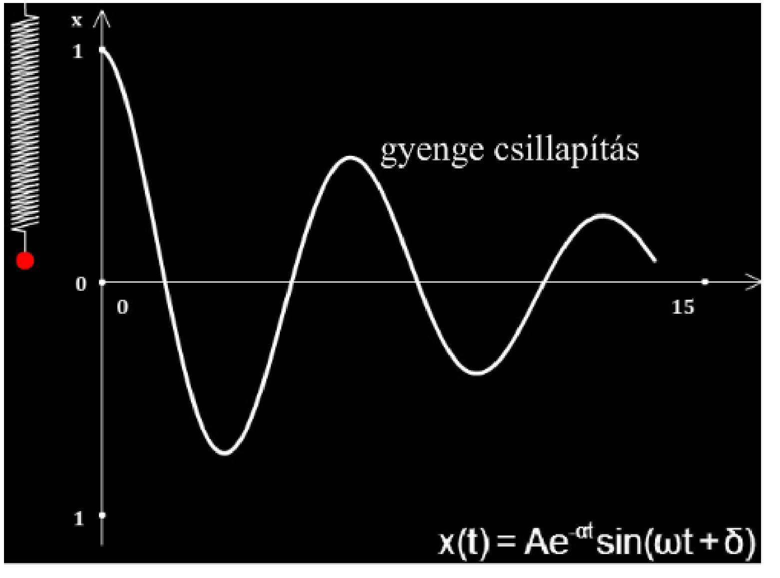
A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta) + \omega Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$$

ANIMÁCIÓ!



A ***C*** és **δ** konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.
Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

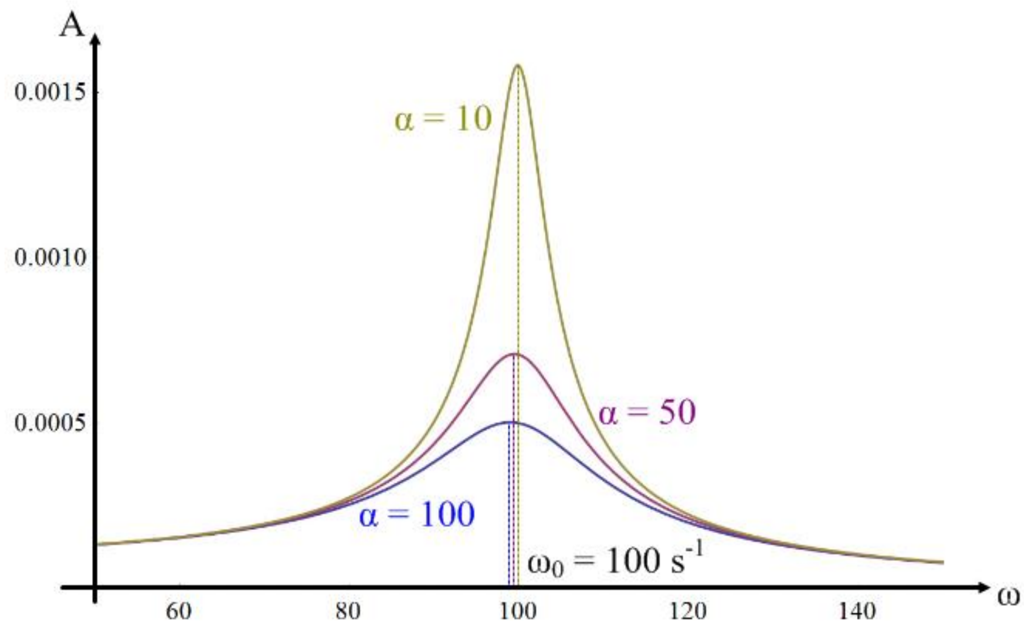
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \qquad \frac{D}{m} = {\omega_0}^2$$

ω_0 - sajátfrekvencia
δ - fáziskésés

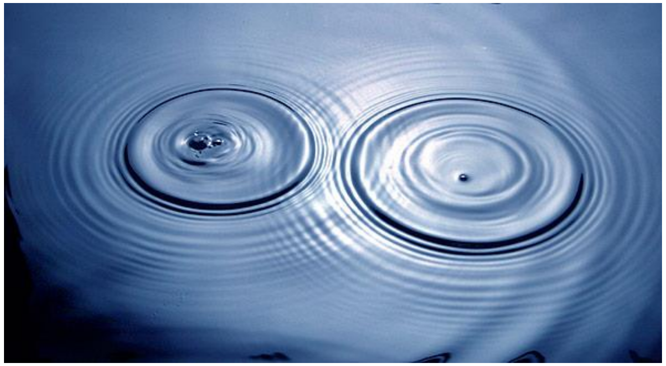
<u>Rezonancia</u>: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.
Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik…) – rezonancia katasztrófa.



Feladat: 7

Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.
Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)



A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).
Ez határozza meg milyen időkésés van a két távoli pont rezgése között.
Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).
A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A\sin(\omega t)$
Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

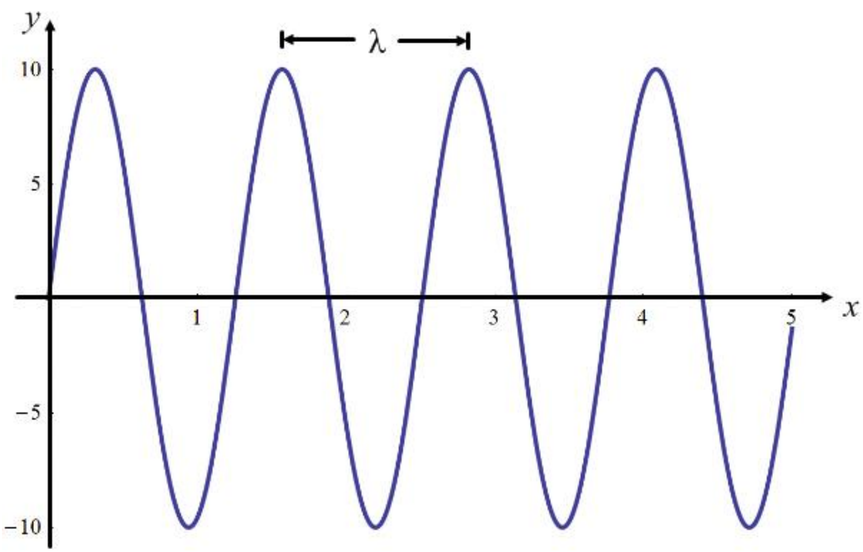
$$y(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

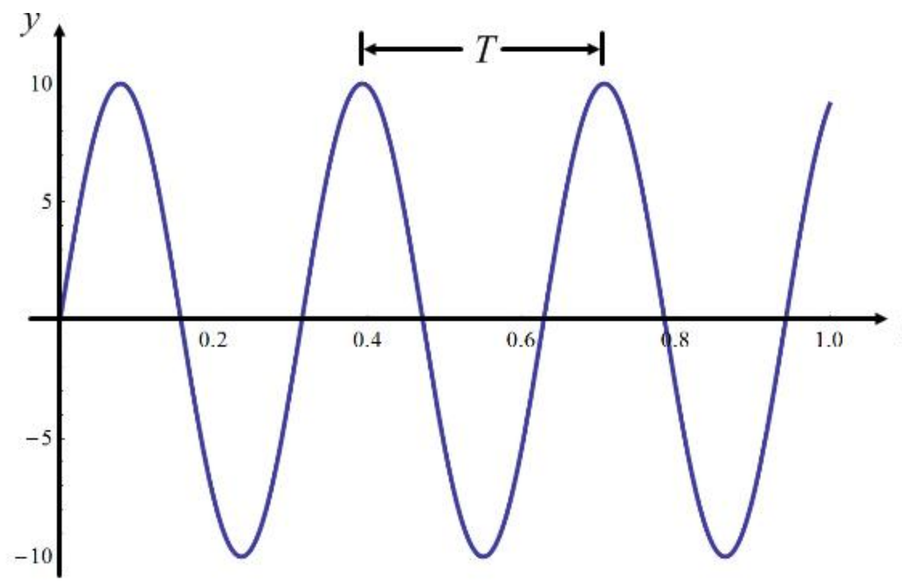
$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

T: a rezgés **periódusideje** ω: a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
λ: a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$
k: **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $\boxed{c = \lambda f}$

Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

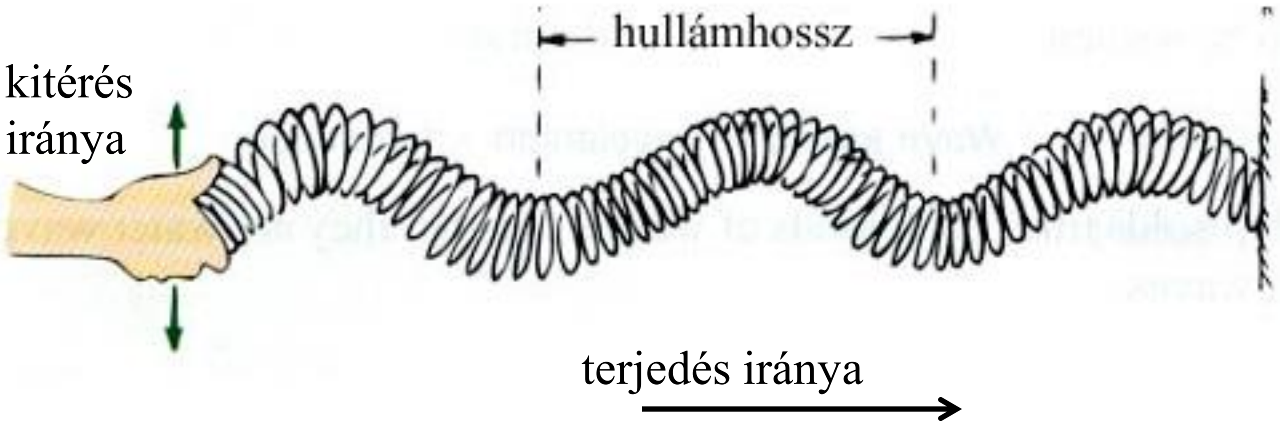




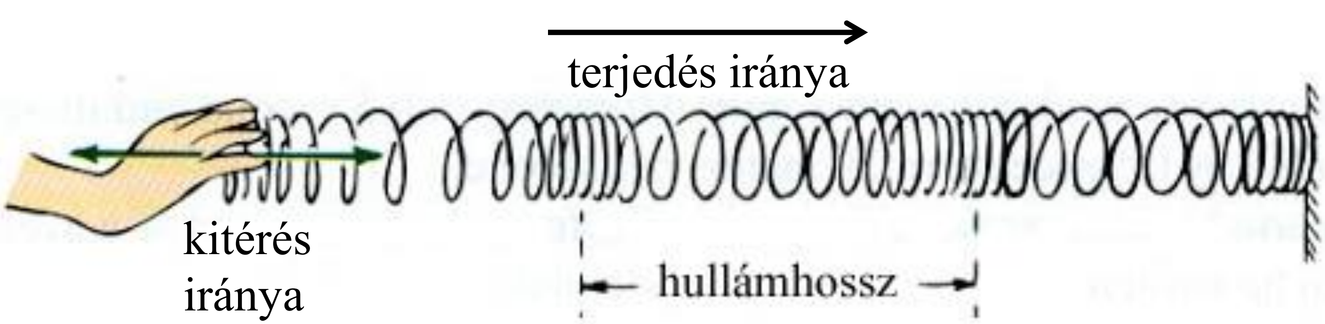
A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok

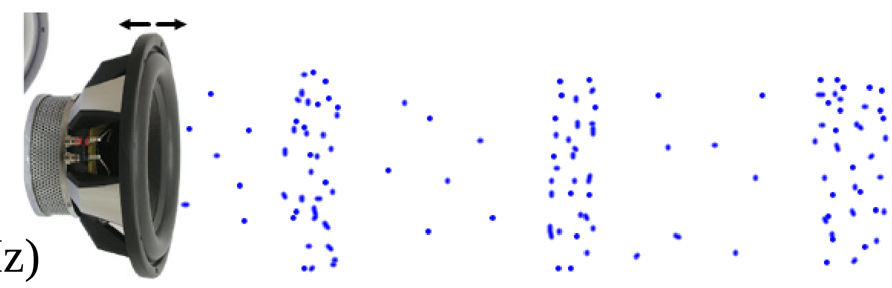


transzverzális hullám:
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos
a terjedési iránnyal

a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)



Állóhullámok*

Közeghatárhoz érve a hullám visszaverődik. Amikor a bejövő és a visszaverődő hullám találkozik kitéréseik előjelesen összeadódnak (**interferálnak**). Bizonyos esetben **állóhullám** jöhet létre.

Vegyünk egy *x* irányba haladó hullámot, és a –*x* irányba haladó visszavert hullámot:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

ANIMÁCIÓ!

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx)$$

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\cos(kx) - A\cos(\omega t)\sin(kx) + A\sin(\omega t)\cos(kx) + A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

$$y(x,t) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t) = 2A(x)\sin(\omega t)$$

Az amplitúdó helyfüggővé válik: **csomópontok** és **duzzadóhelyek**.

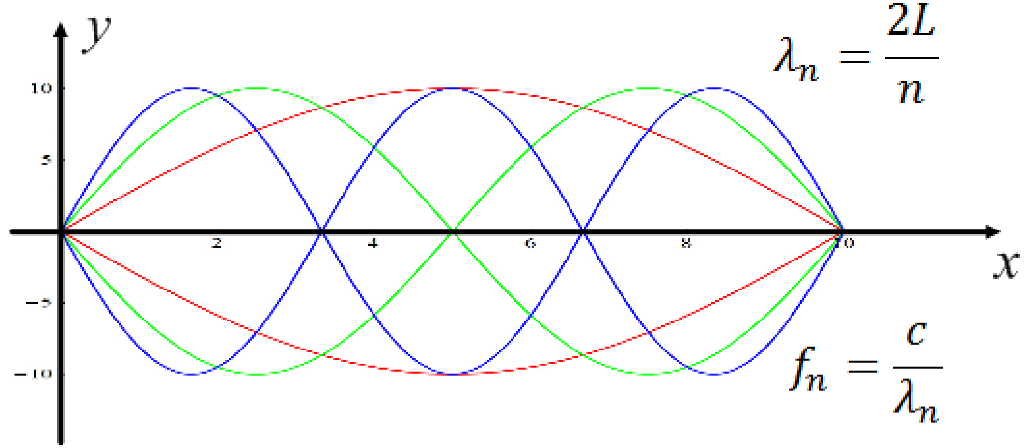
A fázis viszont már nem függ a helytől (hely és időfüggés szétcsatolódik).

Az állóhullám hullámhossza csak az adott geometria által megengedett hullámhosszak lehetnek:

határfeltételek

Pl. rögzített végű húr végén csomópont, nyitott végű síp végében duzzadóhely

Emiatt a frekvencia sem lehet tetszőleges: alaphang és harmonikusok



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n}$$

Doppler effektus*

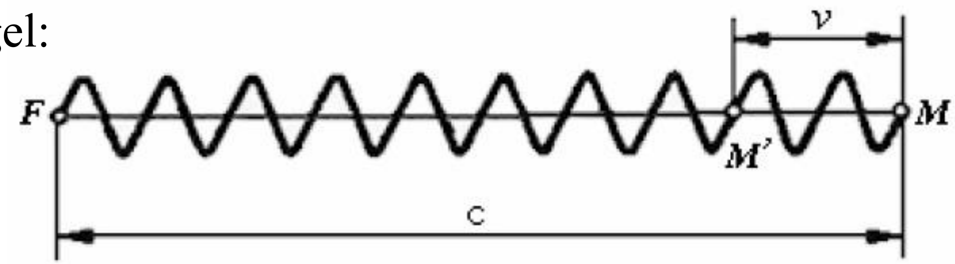
Ha a hullám forrása és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a kibocsátott frekvencia nem egyezik meg az észlelt frekvenciával.

Pl. közeledő és távolodó sziréna hangja

Ha az *M* **megfigyelő közeledik** *v* sebességgel:

Nem csak *ct* hosszúságú hullámsort észlel, hanem *ct* + *vt* hosszúságút.

Egységnyi idő alatt észlelt rezgések száma:

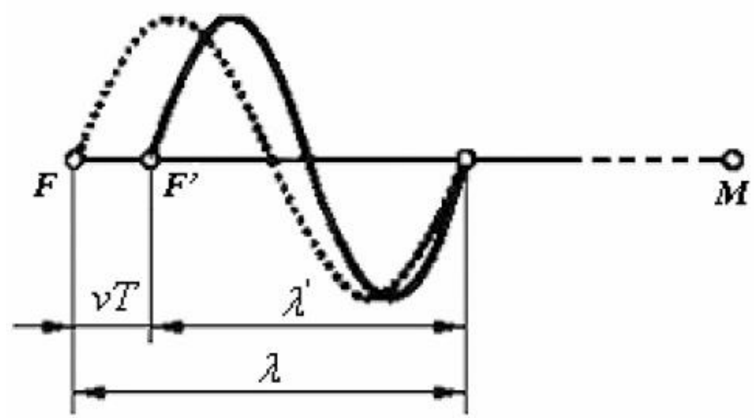


$$f' = \frac{ct \pm vt}{\lambda t} = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

(-*v*/*c* ha távolodik)

Ha az *F* **forrás közeledik** *v* sebességgel.

A hullámhossz *vT* –vel megrövidülni látszik:



$$\lambda' = \lambda - vT$$

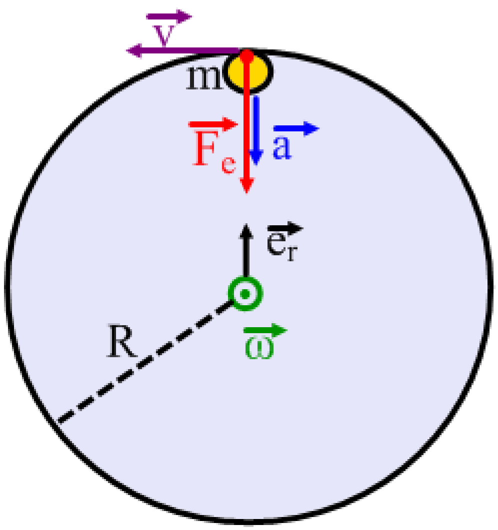
$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda \mp vT} = \frac{c}{\lambda}\frac{1}{1 \mp \frac{vT}{\lambda}} = f\,\frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$$

(+*v*/*c* ha távolodik)

Ha mindkettő mozog **a közeghez képest**: $f' = f\,\dfrac{1 \pm \frac{v_M}{c}}{1 \mp \frac{v_F}{c}}$

Egyenletes körmozgás dinamikája

Egyenletes körmozgás: A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötélerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

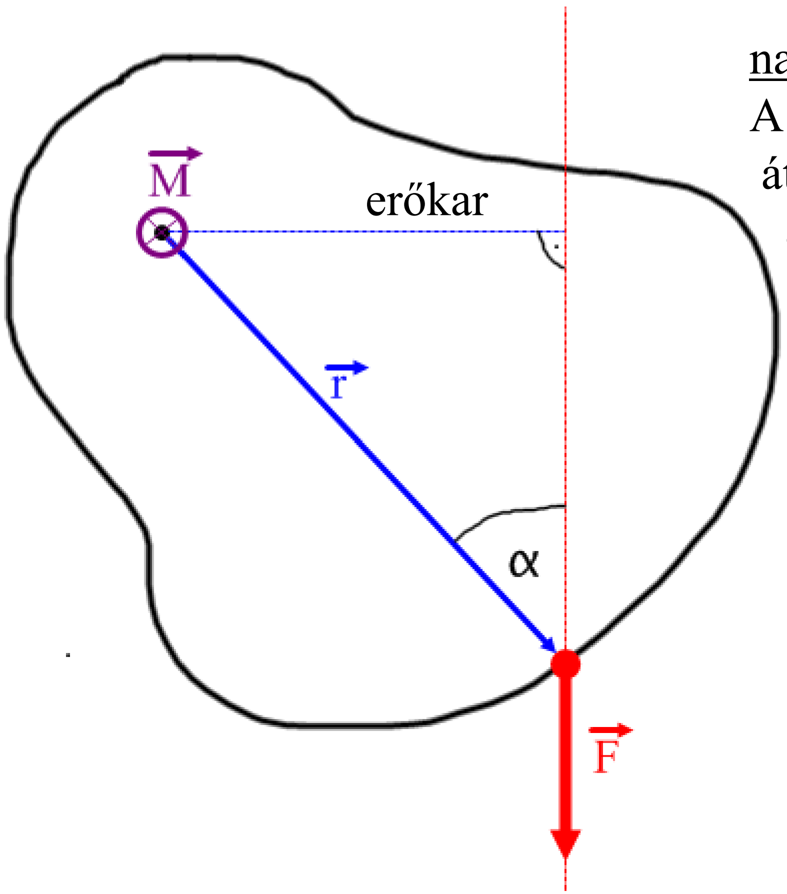
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



nagysága: erő × erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr\sin\alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

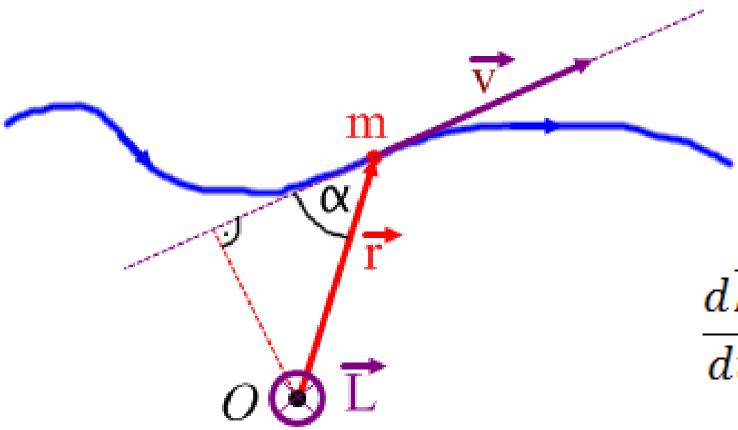
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkéz-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e$$

<u>Perdülettétel</u>:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

Tehetetlenségi nyomaték

<u>Speciális eset</u>: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2\omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\dfrac{dL}{dt} = mr^2\dfrac{d\omega(t)}{dt} = mr^2\beta(t)$

β a szöggyorsulás, az mr^2 tag pedig a tömegpont **tehetetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetetlenségi nyomaték tehát: $\boxed{\theta = mr^2}$, ahol r a tengelytől mért távolság.

A perdülettételt felhasználva: $\dfrac{dL}{dt} = mr^2\dfrac{d\omega(t)}{dt} = \theta\beta(t) = M$

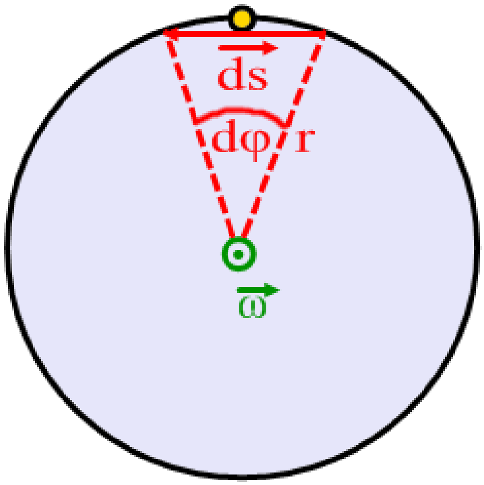
Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $\boxed{M = \theta\beta}$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mr^2\omega^2 = \dfrac{1}{2}\theta\omega^2$

Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során (körmozgás):

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\vec{a}\cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$



Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

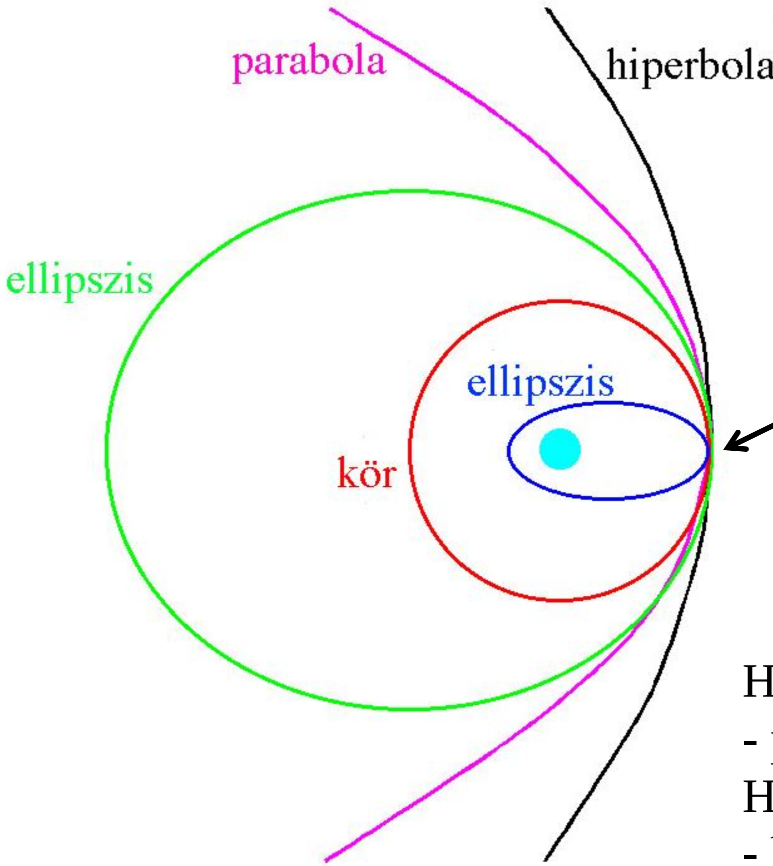
Haladó és forgó mozgások közötti analógia

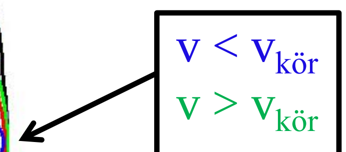
	Haladó mozgás (1 dimenzió)	Forgó mozgás
változó	x	φ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2}\theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\varphi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Bolygók mozgása

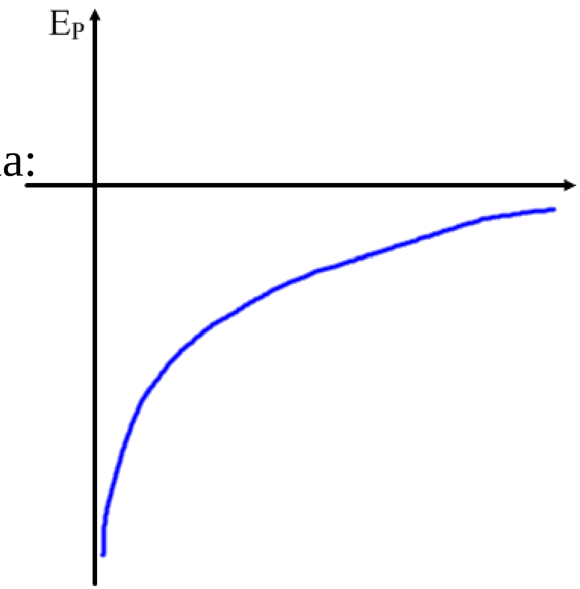
Tegyük fel, hogy *m* tömegű test mozog egy sokkal nagyobb (*M*) tömegű test gravitációs terében. Mivel *M* sokkal nagyobb, mint *m*, ezért nyugvónak tekinthető. pl. Nap és Föld.

Az *m* tömegű test rendelkezik E_K kinetikus és E_P potenciális energiával.
A végtelenben vesszük a nullpontot: $E_P = 0$, ha $r \to \infty$





A mechanikai energia:
$E_M = E_P + E_K$



Ha $E_M \geq 0$, akkor szabad (eltávolodhat végtelenbe)
- parabola ($E_M = 0$) vagy hiperbola alakú pálya

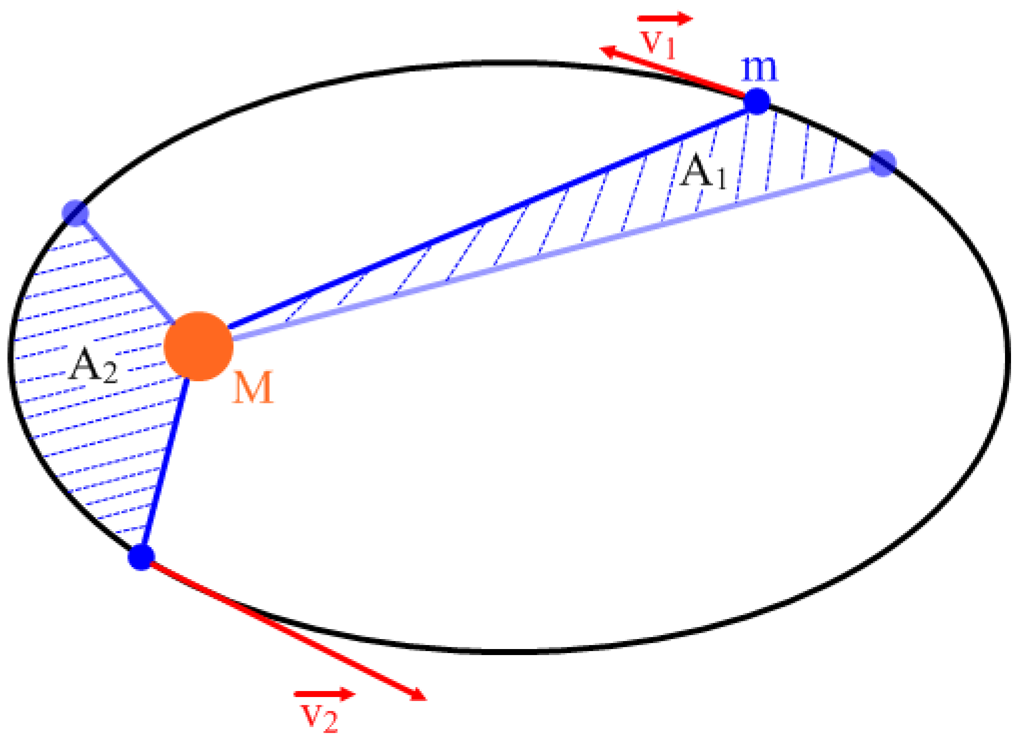
Ha $E_M < 0$, akkor kötött (véges távolságban marad)
- kör vagy ellipszis alakú pálya

Kepler törvényei I-II.*

Egy nagy tömegű test gravitációs terében kötött állapotban mozgó testekre (pl. bolygók).

I. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II. (Területi tétel) A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) egyenlő idő alatt egyenlő területet súrol. A bolygók Napközelben gyorsabban mozognak.
A perdület megmaradásából következik: nincs forgatónyomaték centrális erőtérben.

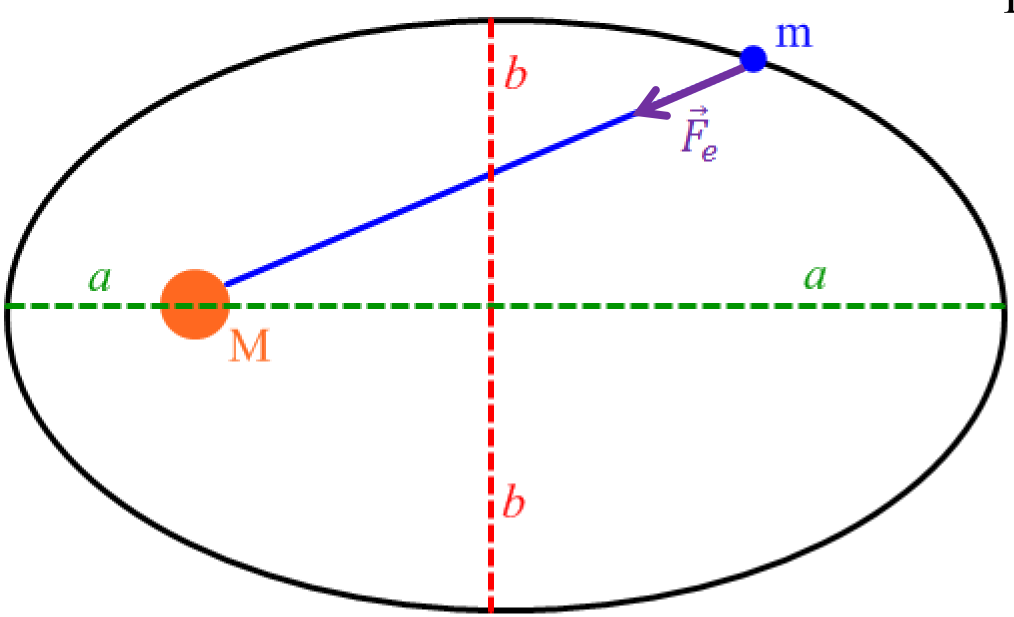


Kepler III. törvénye*

III. Az ellipszispályák fél-nagytengelyeinek (*a*) köbei úgy aránylanak, mint az adott pályákon keringő bolygók keringési idejének (*T*) négyzetei.

Tehát minden a Nap körül keringő bolygóra (és bármilyen testre): $\dfrac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$

Mindhárom törvény a Newton axiómákból, és a Newton-féle gravitációs erőtörvényből levezethető.



Bizonyítás kör alakú pályára: *a* = *b* = *R*

$$F_e = ma$$

$$\gamma \frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$$

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

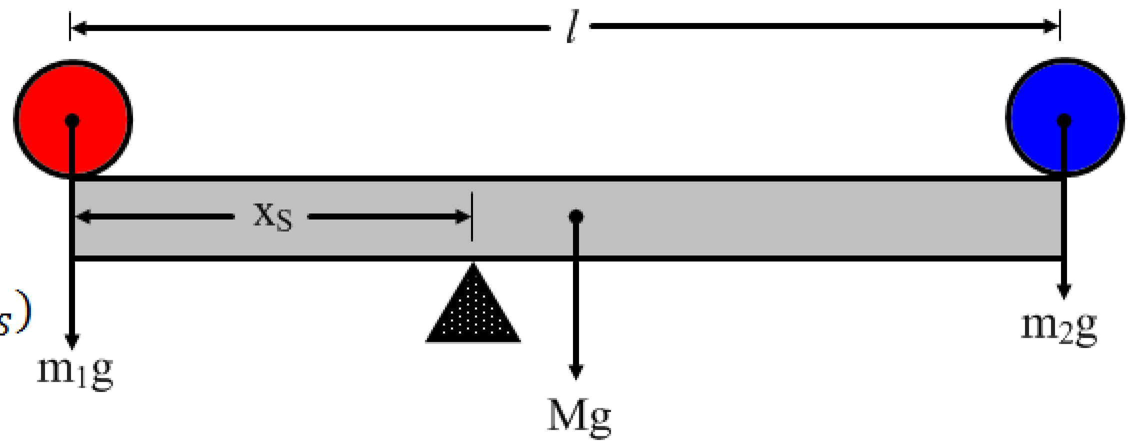
$$\frac{\gamma M}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = \text{állandó}$$

Tömegpont rendszerek (kiterjedt testek) mechanikája

Súlypont*

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

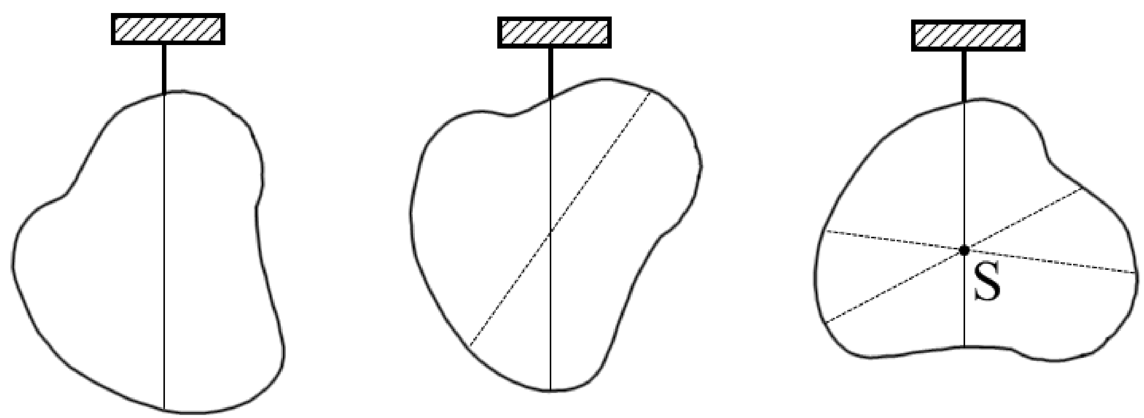


Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Például:

$$m_1 g x_S = Mg\left(\frac{l}{2} - x_S\right) + m_2 g(l - x_S)$$

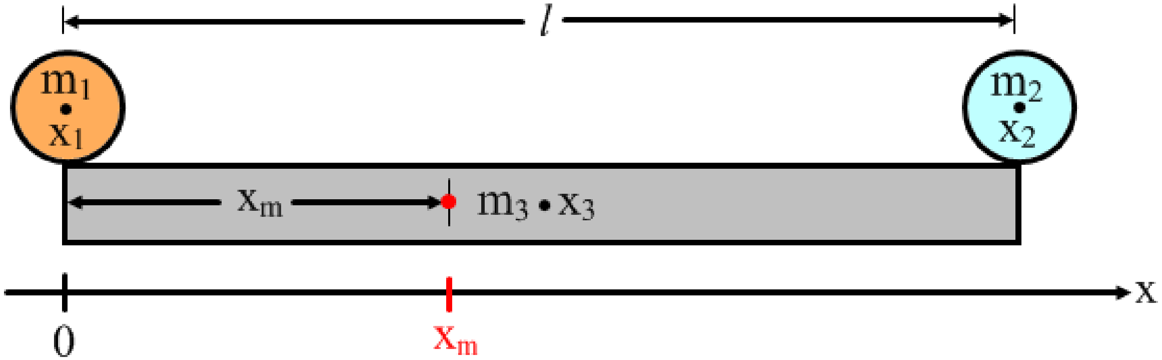
$$x_S = \frac{Mg\left(\frac{l}{2}\right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:



Tömegközéppont*

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):



A példában az összetett test tömegközéppontjának *x* koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{m} \right)$$

tehát: $\boxed{\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i}{m}}$

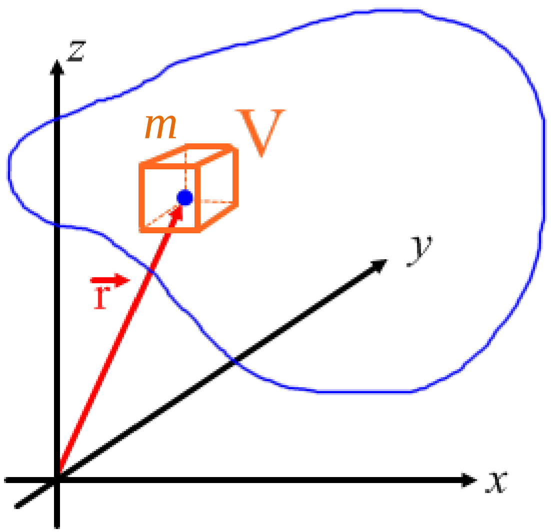
ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.

Folytonos tömegeloszlású test

Folytonos tömegeloszlás esetén a test minden pontjában definiálhatjuk a **sűrűséget**:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{m(\vec{r}, V)}{V}$$



Ez általános esetben pontról pontra változhat.

A test tömegét a sűrűség térfogati integrálja adja (a test térfogatára integrálva):

$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

A test tömegközéppontja (súlypontja) ekkor:

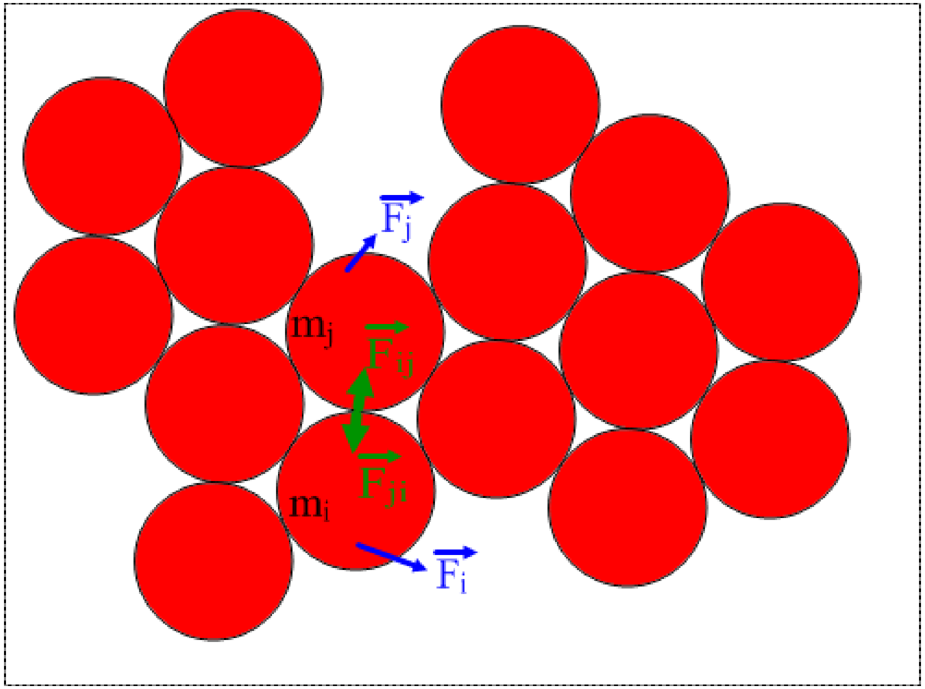
$$\vec{r}_m = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{m}$$

Lendülettétel tömegpontrendszerre

Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (*i*):

A rá ható külső erők eredője: $\vec{F}_i$

A *j*-edik pont által kifejtett erő: $\vec{F}_{ji}$



A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (*i*-edik) tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Lendülettétel tömegpontrendszerre: $$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}$$

Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.
A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \cdots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \cdots$$

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} + m_C\vec{v}_{C1} + \cdots = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2} + m_C\vec{v}_{C2} + \cdots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület *x*, *y* és *z* komponenseire.
Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális (pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)
Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.
Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

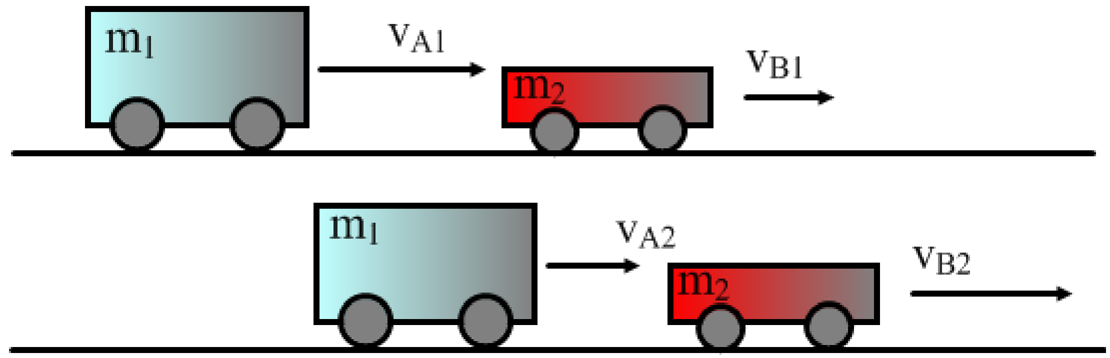
$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.
Extrém esetek:
Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2} = v_{B2}$ és $m = m_A + m_B$
Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2}m_A {v_{A1}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B1}}^2 = \frac{1}{2}m_A {v_{A2}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B2}}^2$$

Ütközési szám

A valóságos ütközések se nem tökéletesen rugalmatlanok, se nem tökéletesen rugalmasak. Az **ütközési szám** azt mutatja meg, hogy mennyire rugalmas az ütközés. Ez a szám a távolodási sebesség és a közeledési sebesség hányadosa.



Az ütközési szám:

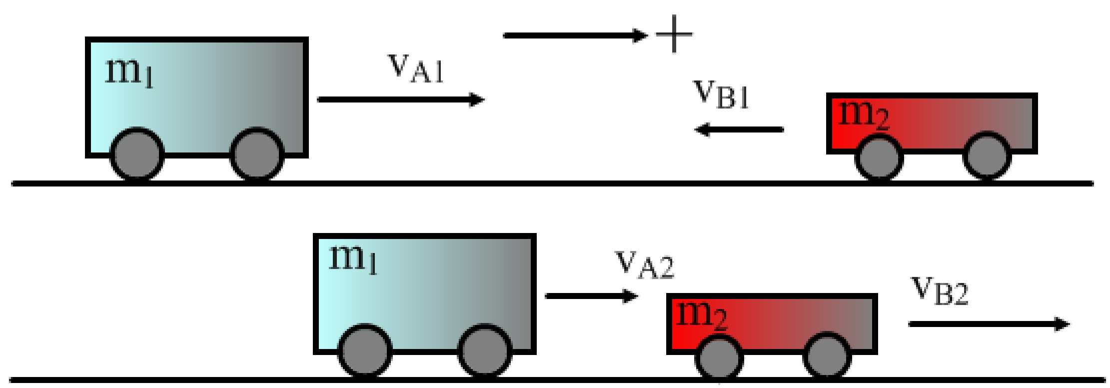
$$k = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

<u>Extrém esetek:</u>

tökéletesen rugalmatlan: $k = 0$

tökéletesen rugalmas: $k = 1$

általánosan: $0 \leq k \leq 1$



Egyszerűbb ezt használni a kinetikus energia megmaradása helyett, mert ez nem másodfokú.

ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Tömegközéppponti tétel

A lendülettételt tovább alakítva, és felhasználva a tömegközéppont/súlypont definícióját:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_S) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_S = m\vec{a}_S$$

A tömegközéppponti tétel: $\boxed{m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege ebbe a pontba lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Perdülettétel és munkatétel

A **perdülettétel** a lendülettételhez hasonlóan levezethető.
A tömegpontrendszer perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő az eredő forgatónyomatékkal:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

A tömegpontrendszerre vonatkozó **munkatétel** azt mondja ki, hogy a rendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes erő (<u>külső és belső</u>) által a rendszeren végzett munkával:

$$\boxed{W = \Delta E_K}$$

A belső erők azért szerepelnek, mert a rendszer tömegpontjai közötti potenciális energia munkavégzés során átalakulhat a pontok kinetikus energiájává.
Például egy rúgó két végéhez kötött testek rezgése során, vagy a Naphoz közeledő üstökös esetében.

Tehetetlenségi nyomaték

Egy tömegpontrendszer **tehetetlenségi nyomatéka** az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak összege:

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2}$$

Folytonos tömegeloszlás esetén az infinitezimális dV térfogatú darab tömege: ρdV
Tehetetlenségi nyomatéka: $dmr^2 = \rho dVr^2$
Tehát az egész test tehetetlenségi nyomatéka: $\boxed{\theta = \int_V \rho r^2 dV}$ r a tengelytől mért távolság.

<u>Steiner tétel</u>: Ha tudjuk a tehetetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre (θ_s), akkor a vele párhuzamos, tőle d távolságban lévő tengelyre a tehetetlenségi nyomaték:

$$\boxed{\theta_d = \theta_s + md^2}$$

Merev testek mechanikája

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

Egy merev test egyensúlyának feltételei:
- a testre ható külső erők eredője nulla **és**
- a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.

Változó mozgás esetén:
Merev test mozgása tehát haladó mozgásból és forgómozgásból áll.
- A haladó mozgást (a tömegközéppont gyorsulását) a **tömegközépponti tételből** kaphatjuk meg.

$$m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

- A forgó mozgás szöggyorsulását pedig a **forgómozgás alapegyenletéből** lehet meghatározni.

$$M_e = \theta\beta$$

Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás*

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuum**ról beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

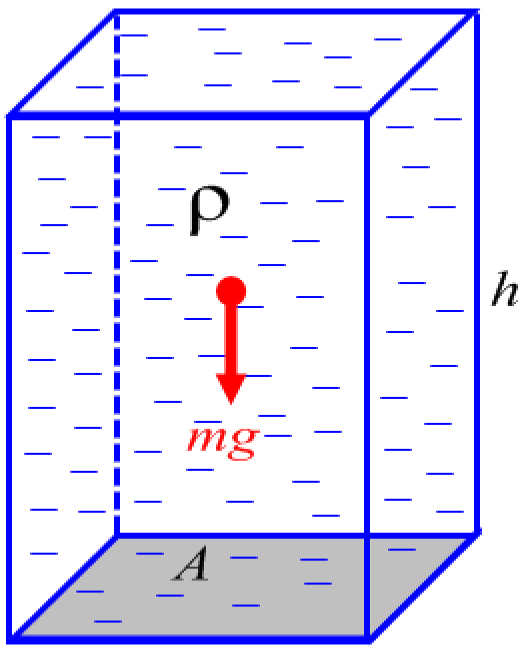
$$p = \lim_{A \to 0} \frac{F_{\perp}(A)}{A}$$

Mértékegysége: $[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal)

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (*h* magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_{\perp}(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g$$

ρ: sűrűség



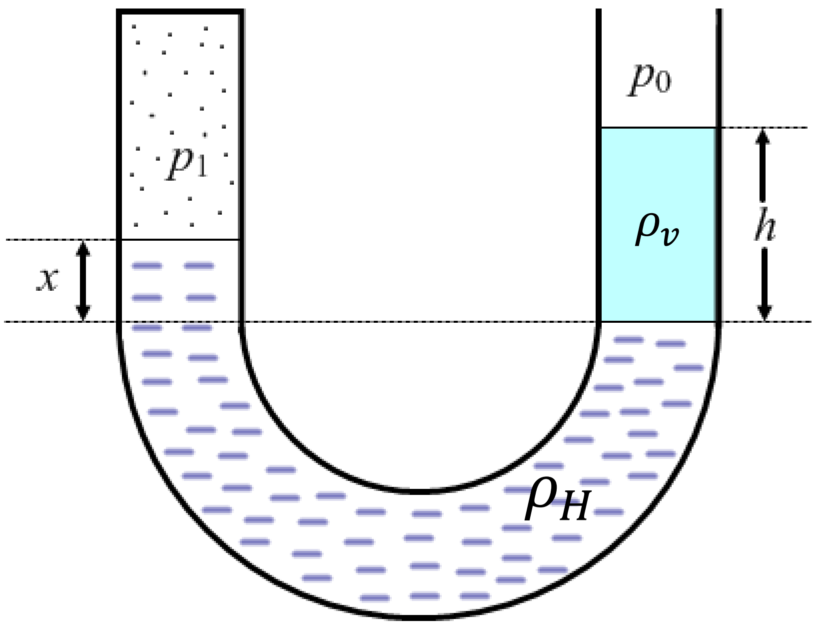
Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.

Pascal törvénye – Példa*

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul 13,6g/cm^3 sűrűségű higany, a jobb szárban efölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar, a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása 0,9bar. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

$p_0 = 10^5$Pa, $p_1 = 0{,}9 \cdot 10^5$Pa, $h = 50$cm



A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

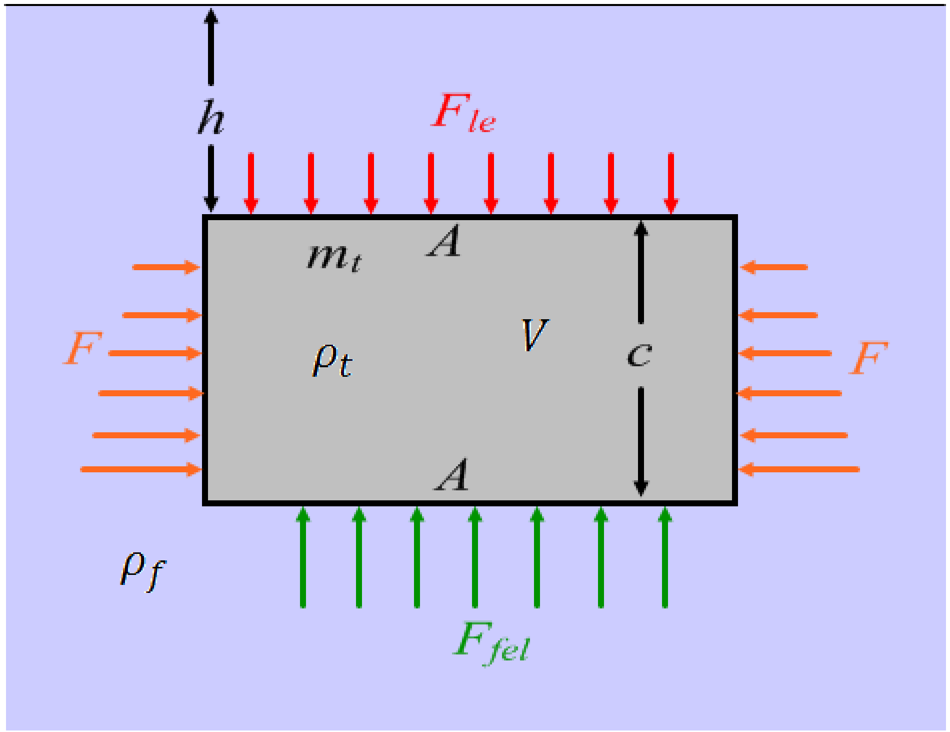
$$p_b = p_j$$

$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \cdots = 11{,}17\text{cm}$$

Felhajtó erő*

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.
A téglatest alakú test lapjaira:
- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...



$$F_f = F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A =$$
$$= \rho_f g(h + c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA =$$
$$= \rho_f Vg = m_f g$$

V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f
Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a <u>kiszorított folyadék súlyával</u>. Ez más alakra is igaz.

<u>Archimédesz törvénye</u>: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Feladat: 9

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.

Felhajtó erő - elmerülés*

Amennyiben a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké: $\rho_t > \rho_f$
A test teljes térfogata a víz alá merül.

A felhajtó erő nagysága: $F_f = V\rho_f g$

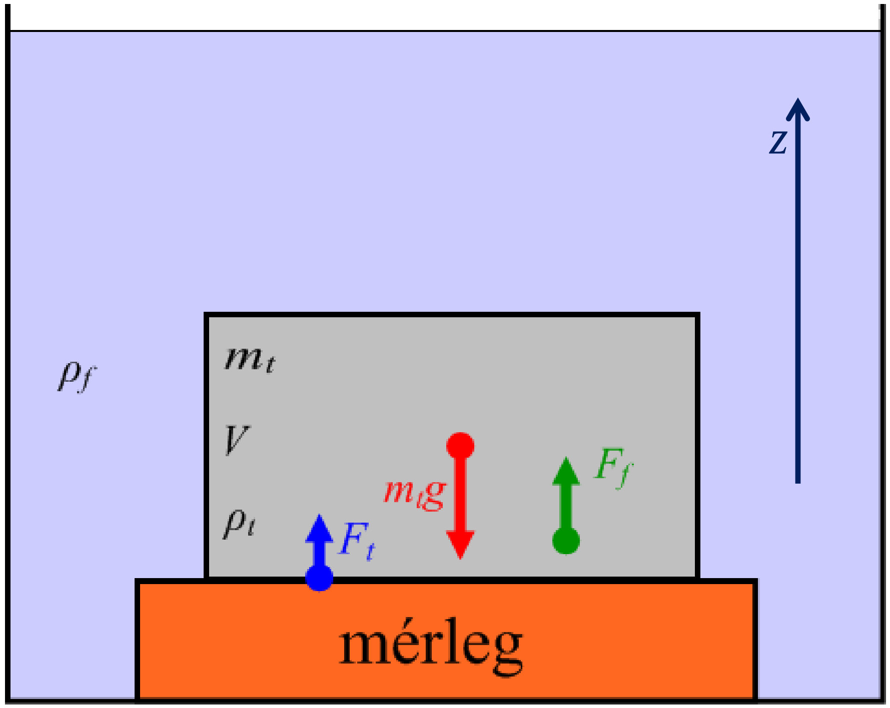
A test egyensúlyához egy tartó erő is szükséges, pl. egy mérleg a folyadék alján.

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$F_f + F_t - m_t g = 0$$
$$V\rho_f g + F_t - V\rho_t g = 0$$

A szükséges tartó erő tehát (látszólagos súly):

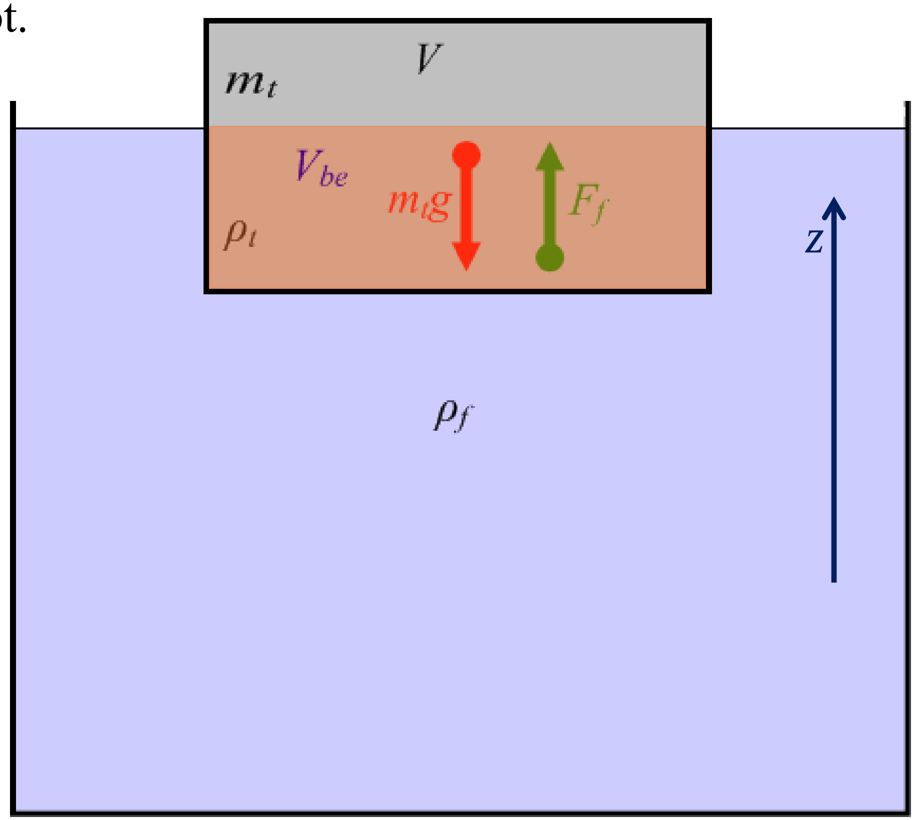
$$F_t = Vg(\rho_t - \rho_f)$$



Abban az esetben amikor a test és a folyadék sűrűsége megegyezik, a tartó erő nulla.
Egy tetszőleges mélységbe helyezett test ekkor nyugalomban van, hiszen $F_f = m_t g$

Felhajtó erő - úszás*

Amennyiben a V térfogatú test sűrűsége kisebb mint a folyadéké: $\rho_t < \rho_f$
A test egy része nem merül el.
Csak a bemerült rész (V_{be}) szorít ki folyadékot.



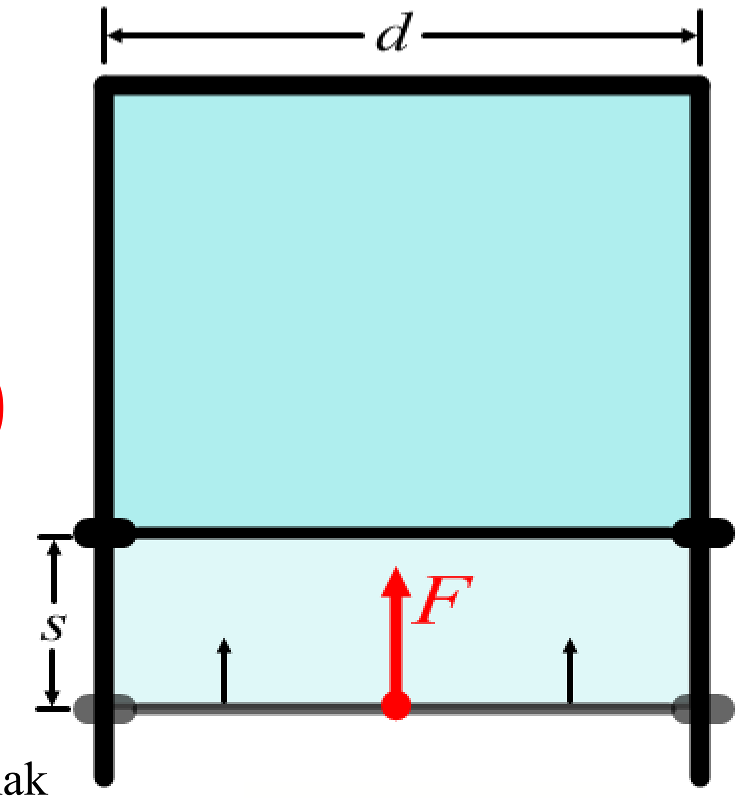
A felhajtó erő nagysága tehát: $F_f = V_{be} \rho_f g$

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$F_f - m_t g = 0$$
$$V_{be} \rho_f g = V \rho_t g$$
$$\frac{V_{be}}{V} = \frac{\rho_t}{\rho_f}$$

A test bemerülő részének térfogata úgy aránylik annak teljes térfogatához, mint a sűrűsége a folyadék sűrűségéhez.

Felületi feszültség



Mosószeres vízbe mártott drótkeret oldalaira a kifeszült hártya összehúzó erőt fejt ki.
Az alsó d hosszúságú oldalra:

$F = 2\alpha d$ ahol α a **felületi feszültség**.

A kettes szórzó az elülső és hátulsó felületek miatt van (2 felület).

Feladat: 10

Ha az alsó oldal egy mozgatható rúd, amely s távolságot mozdul felfelé, a felület megváltozása:

$\Delta A = -2ds$ (2 oldal továbbra is)

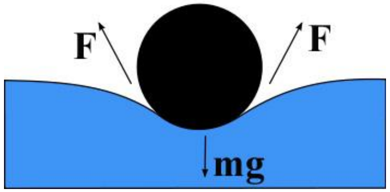
A szappanhártya erejének munkája pedig:

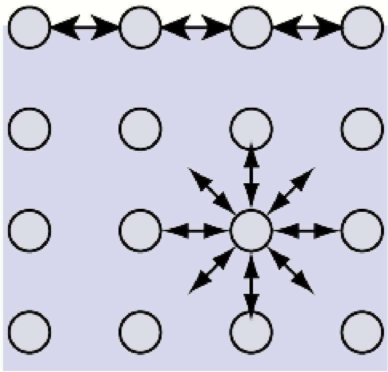
$W = Fs = 2\alpha ds = -\alpha\Delta A$

Mivel a munka a felületváltozással arányos, a folyadéknak a felületével arányos energiája van:

$E = \alpha A$

Ennek oka a molekulák közötti vonzó kölcsönhatásban rejlik.
A felületet igyekszik a folyadék minimalizálni: csepp alakja





Tömegmegmaradás

A **hidrodinamika** a folyadékok, mint kontinuumok áramlását leíró tudományág.

Kétféle tárgyalásmód:

1. Lagrange-módszer: az egyes kiszemelt folyadékrészekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és a kezdeti feltételeket használva megoldjuk.

2. Euler-féle leírás: a különböző pontokban az ott áramló folyadék tulajdonságait mérjük (pl. sebesség, nyomás, sűrűség).
Ha ezek időben állandóak minden pontban, akkor **stacionárius** áramlásról beszélünk.

Kontinuitási egyenlet: A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el.
Tekintsünk egy nyugvó *V* térfogatot, amelyet az *A* zárt felület határol. A *dt* idő alatt a *dA* elemi felületdarabon kiáramló tömeg: $dm = \rho dV = \rho dA v \cos\alpha \, dt = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} dt$
Tehát időegység alatt: $\frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

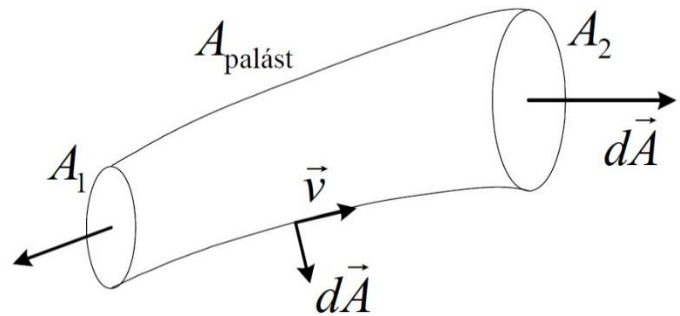
A *V* térfogatból a teljes *A* felületen keresztül időegység alatt kiáramló tömeg megegyezik a térfogatban lévő tömeg csökkenésével (negatív deriváltjával):

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Kontinuitási egyenlet

<u>Stacionárius (időben állandó) áramlás:</u> Minden idő szerinti derivált nulla.

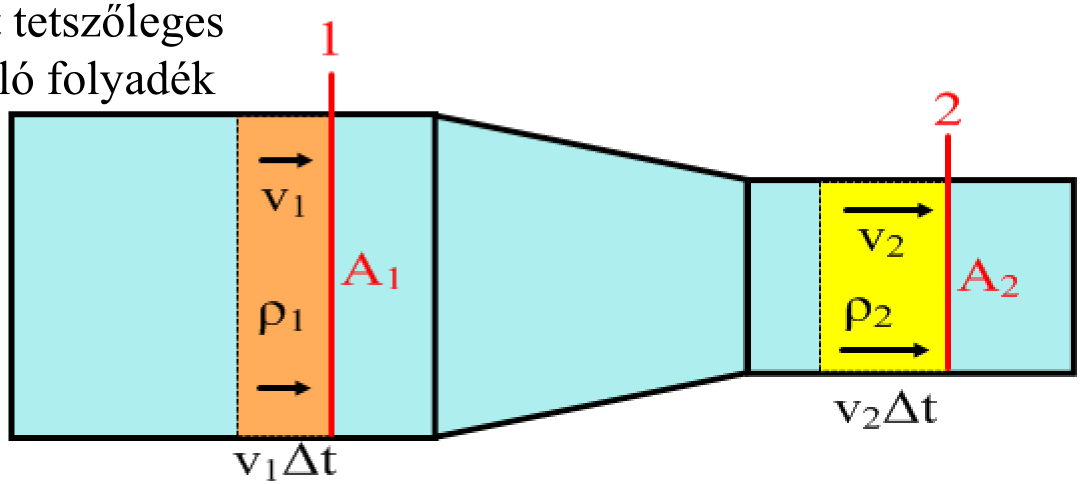
$$0 = \oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$



A palástra vett integrál nulla, mert a sebesség párhuzamos a felülettel. Tehát a két végen történő be- és kiáramlás ki kell, hogy ejtse egymást.
Ennek eredménye, hogy egy cső két tetszőleges helyén a keresztmetszeteken átáramló folyadék tömege megegyezik.

Az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyekre Δt idő alatt:

$$m_1 = m_2$$
$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$
$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$



$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ a **tömegáram** ugyanaz a cső mentén.

Összenyomhatatlan folyadékra ($\rho_1 = \rho_2$): $A_1 v_1 = A_2 v_2$ a **térfogatáram** is ugyanaz a cső mentén.

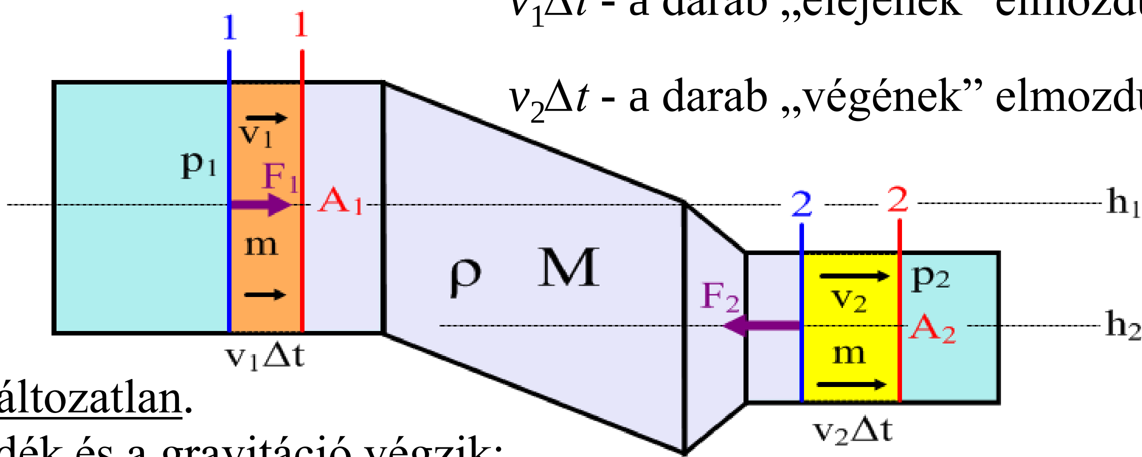
Bernoulli egyenlet

Alkalmazzuk a $W = \Delta E_K$ munkatételt a h_1 magasságban lévő A_1 keresztmetszetű rész és a h_2 magasságban lévő A_2 keresztmetszetű rész között az $m + M$ tömegű összenyomhatatlan ρ sűrűségű folyadékdarabra, stacionárius áramlás esetén. Kis Δt idő alatt:

$v_1\Delta t$ - a darab „elejének” elmozdulása

$v_2\Delta t$ - a darab „végének” elmozdulása

Feladat: 11



Az M tömegű közbülső rész változatlan.
A munkát a szomszédos folyadék és a gravitáció végzik:

$$W = W_f + W_g = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) =$$
$$= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V + \rho \Delta V g(h_1 - h_2) = \Delta V(p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2)$$

A kinetikus energia megváltozása: $\Delta E_K = E_{K2}(m) + E_K(M) - E_{K1}(m) - E_K(M)$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2{}^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2 = \Delta V \left(\frac{1}{2}\rho v_2{}^2 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2\right)$$

Tehát:

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 \rightarrow \boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g h_2}$$

Bernoulli egyenlet - Példa*

Milyen sebességgel folyik ki egy vödör alján fúrt lyukon a víz, ha a vödörben *h* magasságig van víz?

Feltételezve, hogy a vízszint nagyon lassan csökken: $v_1 \approx 0$

A Bernoulli-egyenletet felhasználva:

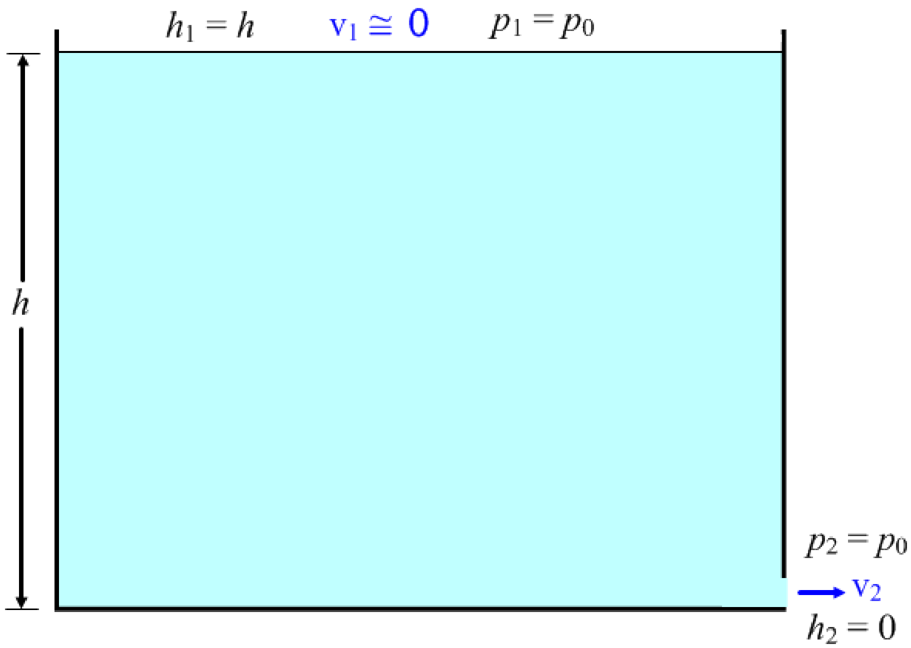
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + 0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + 0$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$2gh = {v_2}^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



A sebesség megegyezik azzal, amit egy *h* magasságból szabadon eső test érne el.