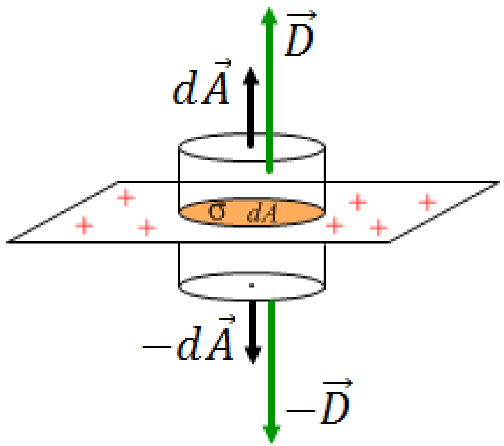
Példák a Gauss törvény használatára*

Végtelen töltött membrán σ felületi töltéssűrűséggel:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$



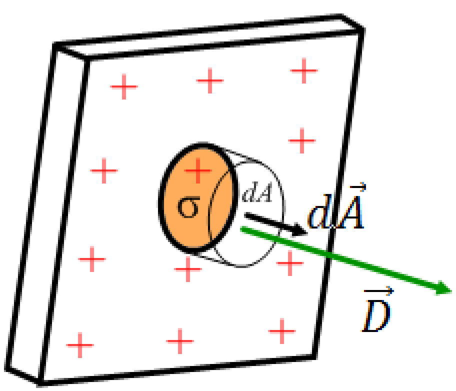
$$\left.\begin{array}{r} \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = DdA + (-D)(-dA) = 2DdA \\ Q = \sigma dA \end{array}\right\} =$$

$$2DdA = \sigma dA$$

$$D = \frac{\sigma}{2} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Végtelen töltött felület σ felületi töltéssűrűséggel:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

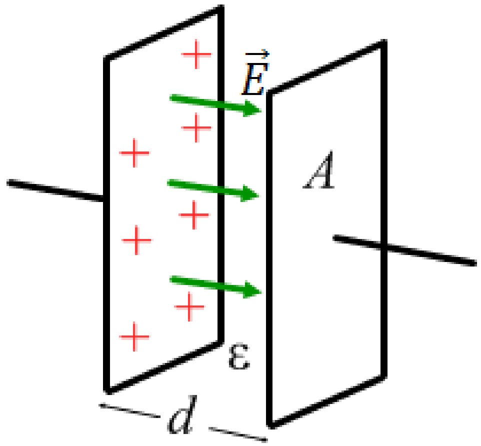


$$\left.\begin{array}{r} \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = DdA \\ Q = \sigma dA \end{array}\right\} =$$

$$D = \sigma \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Feladat: 3

Síkkondenzátor kapacitása



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon} d} = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

<u>Elektromos mező energiája:</u> A kondenzátor annyi energiát tárol, mint amennyi a feltöltéséhez kell.
Tegyük fel már van rajta $q(t)$ töltés és a feszültség $u(t)$.
Ekkor további dq töltés szétválasztásához végzendő munka:

$$dW = u(t)dq = \frac{q(t)}{C} dq$$

A teljes feltöltésre $q = 0$ és $q = Q$ között:

$$W = \int_0^Q u(t)dq = \int_0^Q \frac{q(t)}{C} dq = \left[\frac{q^2}{2C}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2U^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

A térfogati energiasűrűség:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{CU^2}{2}}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon A}{d}\frac{E^2d^2}{2}}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon E \cdot E = \frac{1}{2} D \cdot E$$

Általános esetben: $w = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$ ha a közeg anizotrop, így akkor is érvényes

Stacionárius áram (egyenáram)

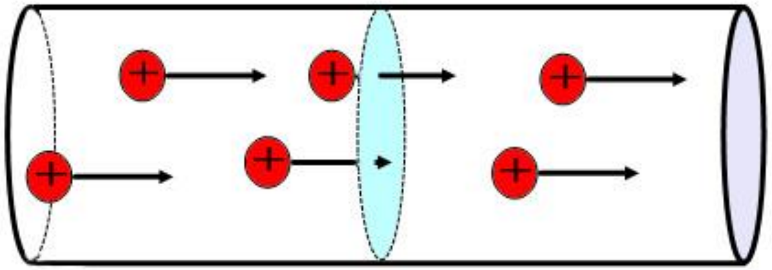
Elektromos áramerősség

Két különböző potenciálon lévő fémet vezetővel összekötve töltések áramlanak amíg a potenciál ki nem egyenlítődik.

Az elektromos áram iránya a pozitív töltéshordozók áramlási iránya.

<u>Áramerősség:</u> Egy vizsgált felület keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés.

$$[I] = \mathrm{A(amper)} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$



Amennyiben az áramerősség állandó:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Ha az áramerősség időben változik, a t_1 és t_2 között átáramlott töltés megadható mint:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

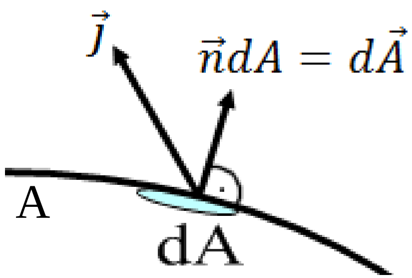
Háztartási gépekben néhány tizedtől néhány amper erősségű áram. Halálos: kb. 0,5 A

Áramsűrűség vektor

Elektromos áramsűrűség vektor: egy pontban értelmezett, nagysága megegyezik az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló töltéssel. Iránya a pozitív töltések áramlási iránya.

Az áramsűrűség vektor nagysága: $j = \lim_{A\to 0} \frac{I}{A}$ Mértékegysége: $[j] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

Egy bármely felületen átáramló áram erőssége általánosan: $I = \int_{\mathrm{A}} \vec{j} \cdot d\vec{A}$



ahol

$\vec{j} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot \vec{n} dA = j_n dA$

egy felületelemre számolt elemi áramerősség.

Ha az áramsűrűség vektor a felület minden pontjában ugyanakkora, és minden pontban merőleges a felületre, akkor:

$$I = jA$$

Áramforrások

A folyamatos töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti a magasabb potenciálú helyre.

Áramforrások azok a berendezések, melyekben ilyen erők működnek.

Az elektromos energia forrása az áramforrásokban lehet pl.
- mechanikai energia (generátorok, dinamók)
- kémiai energia (galvánelemek, akkumulátorok)
- hőenergia (termoelem)
- fényenergia (fotocella)

A q töltésre ható idegen erő: $\vec{F}^*$ Ebből definiáljuk az idegen térerősséget: $\vec{E}^* = \dfrac{\vec{F}^*}{q}$

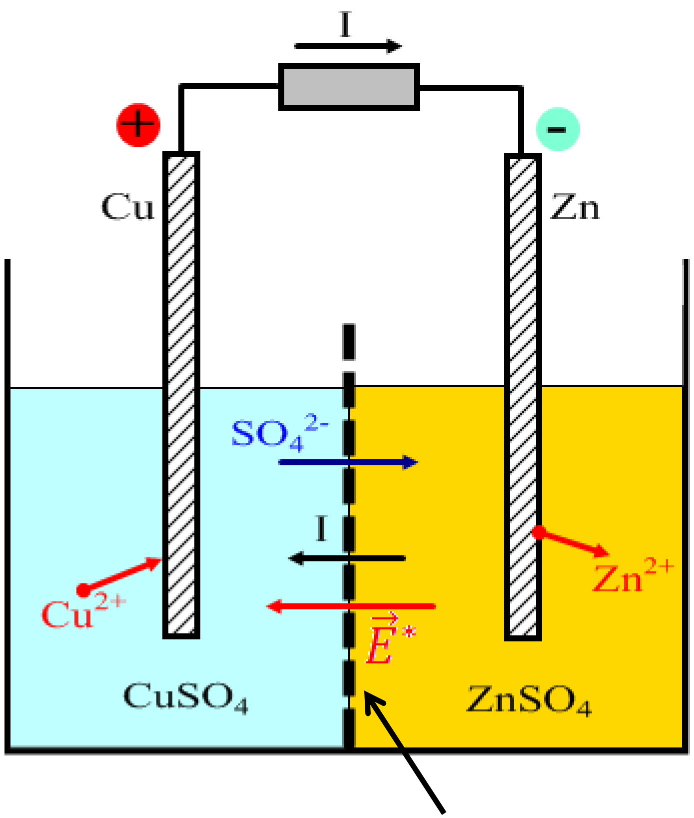
Az elektromotoros erő definíciója: $\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$ az áramforrás belsejében a – és + pólusok között integrálva.

Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Fogyasztó: Olyan vezető amelyben idegen erő nincs jelen. Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Elektromos áram galvánelemben

<u>Daniell-elem</u>



diafragma
(csak szulfát-ionok
jutnak át)

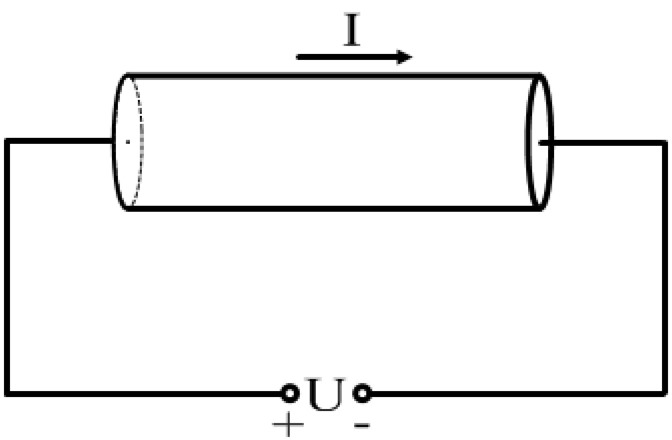
Kémiai energia alakul át elektromos energiává. Porózus anyaggal elválasztott cink-szulfát és réz-szulfát oldatok, bennük fém elektródákkal.
Cink beoldódik, két elektront hátrahagyva. Ezek a vezetőn keresztül a rézre kerülnek. A kiváló réz felveszi az elektronokat.

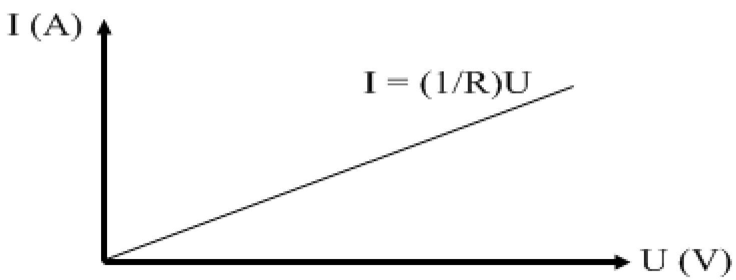
Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Ohm-törvény (integrális alak)

Tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két vége közötti feszültséggel:





Hányadosuk a vezető két vége közötti ellenállás:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \Omega(\mathrm{ohm}) = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Ez a törvény fémekre és ötvözeteikre bizonyos határok között jó közelítéssel igaz, ellentétben például a félvezetőkkel vagy elektrolitokkal.

Egyenáramú áramkörök

Stacionárius elektromos áram (egyenáram): az összes fizikai mennyiség állandó, és a töltések időben állandósult módon áramlanak.

A töltésmegmaradás törvényét a kontinuitási egyenlet írja le:

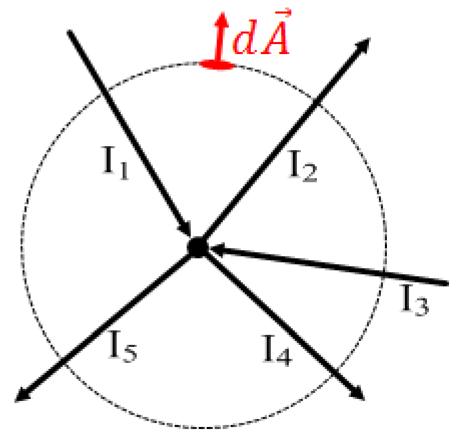
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

A rögzített *V* térfogatot az *A* zárt felület határolja, melynek normálisa kifelé mutat. ρ a térfogati töltéssűrűség.

Stacionárius esetben a baloldal nulla, így a befolyó (-) és kifolyó (+) áramok algebrai (előjeles) összege zérus.

Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény):

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$



$$I_2 + I_4 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$$

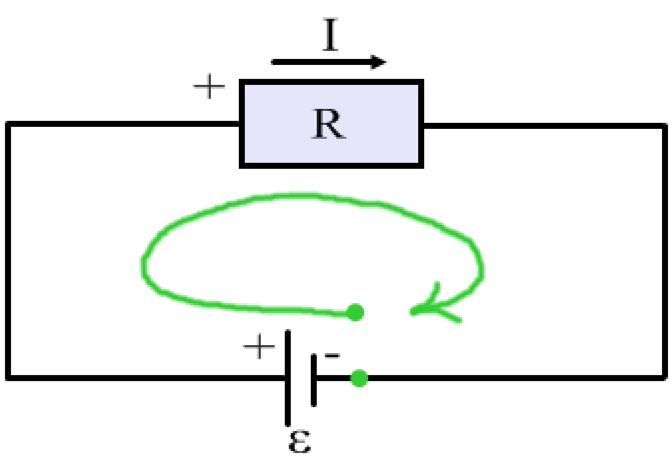
Kirchhoff II. törvénye (hurok törvény)

A stacionárius elektromos tér konzervatív, tehát továbbra is fennáll: $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

A térerősség görbe menti integrálja a potenciálkülönbség, tehát egy zárt hurok mentén a potenciálváltozások előjeles összege nulla. Ez Kirchhoff II. törvénye.

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

<u>A törvény alkalmazása</u>: felveszünk egy körüljárási irányt, és egy áramirányt.



$$\varepsilon - RI = 0$$

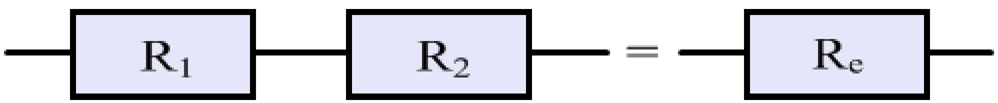
Tehát egy ideális telep és egy ellenállás esetén:

$$\varepsilon = RI$$

Összetett áramkörök*

<u>Csomópont</u>: azon pont ahová kettőnél több vezeték fut be
<u>Ág</u>: két vége csomópont, de benne nincs több csomópont

Az egy ágon belüli elemek **sorosan** vannak kapcsolva és rajtuk ugyanakkora áram folyik keresztül.

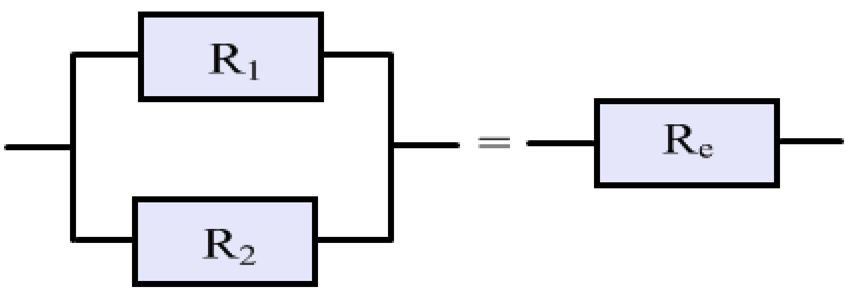


$$U_1 + U_2 = U \qquad I_1 = I_2 = I$$

$$R_1 I + R_2 I = R_e I \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = R_e$$

Több ellenállásra: $R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i$

Párhuzamos kapcsolásnál az elemek megfelelő pólusai azonos potenciálon vannak.



$$U_1 = U_2 = U \qquad I_1 + I_2 = I$$

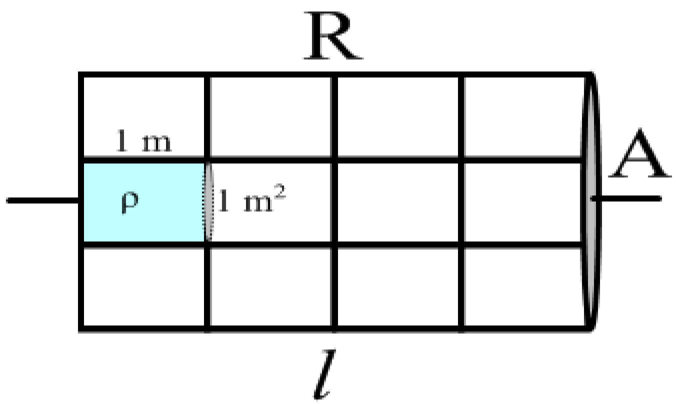
$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_e} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_e}$$

Több ellenállásra: $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Feladat: 4

Az ellenállás függése a geometriától*

Fajlagos ellenállás (ρ): Egységnyi hosszú és egységnyi keresztmetszetű vezető ellenállása.



$$[\rho] = \Omega\mathrm{m} \quad \text{vagy} \quad \frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

kétszeres hossz: mintha sorosan lenne kettő

kétszeres keresztmetszet: …párhuzamosan…

Tehát az ellenállás arányos a hosszal, fordítottan a keresztmetszettel: $R = \rho \dfrac{l}{A}$

A fajlagos ellenállás csak az anyagra jellemző mennyiség.

pl. réz esetén: $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\Omega\mathrm{m}$ (áramkörben elhanyagolható ellenállás)

műanyagokra: $\rho = 10^{15} - 10^{20}\Omega\mathrm{m}$ (szigetelők)

Differenciális Ohm-törvény

Vékony vezetőre vehetjük az áramsűrűséget állandónak és a vezetővel párhuzamosnak.

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = jA$$

A vezető ellenállására így: $R = \frac{U}{I} = \frac{El}{jA}$ illetve $R = \rho \frac{l}{A}$

Innen: $\rho = \frac{E}{j}$ azaz $\rho j = E$ Vektori formában: $\rho \vec{j} = \vec{E}$

Bevezetve a σ = 1/ρ fajlagos vezetőképességet a differenciális Ohm-törvény:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Amennyiben egy áramforrás miatt vagy egyéb oknál fogva $\vec{E}^*$ idegen térerősség is jelen van, akkor azt is számításba kell venni!

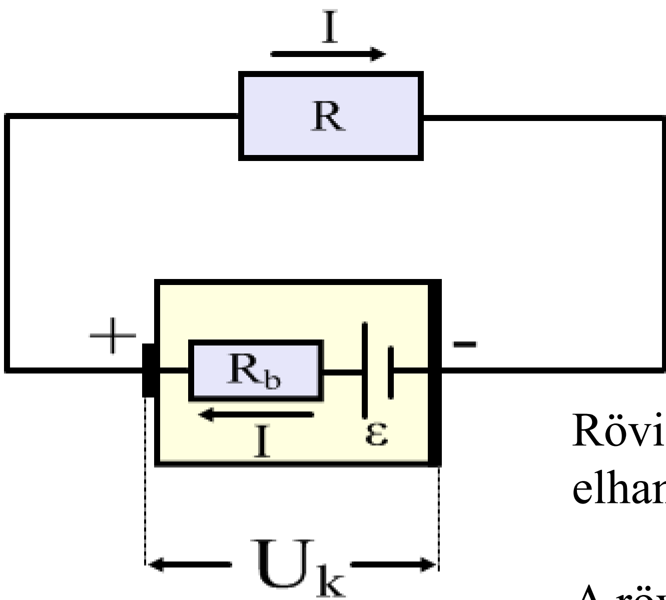
$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)}$$

Fémeknél állandó hőmérsékleten jó közelítéssel igaz, de pl. félvezető diódák esetében még állandó hőmérsékletre sem teljesül.
Ha a ρ fajlagos ellenállás és az A keresztmetszet a vezeték mentén változik, akkor az R ellenállás kiszámítása:

$$R = \int_g \rho(s) \frac{ds}{A(s)}$$

a g görbét a vezeték mentén vesszük

Valóságos áramforrás belső ellenállása



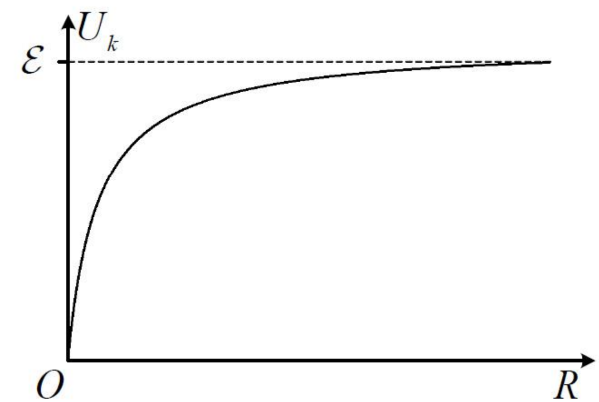
Kirchhoff II. törvényéből:

$$\varepsilon - I(R + R_b) = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_b}$$

Rövidzár, ha a külső fogyasztók (terhelés) ellenállása elhanyagolható: $R \approx 0$

A rövidzárási áram: $I_{\text{röv}} = \frac{\varepsilon}{R_b}$



A külső fogyasztókra jutó feszültség a kapocsfeszültség:

$$U_k = IR = \varepsilon - IR_b = \varepsilon \frac{R}{R + R_b}$$

Terheletlen telep esetén (ha $R \to \infty$), a kapocsfeszültség egyenlő az elektromotoros erővel (üresjárási feszültség, U_0):

$$U_k = U_0 = \varepsilon \quad \text{és ekkor} \quad I = 0$$

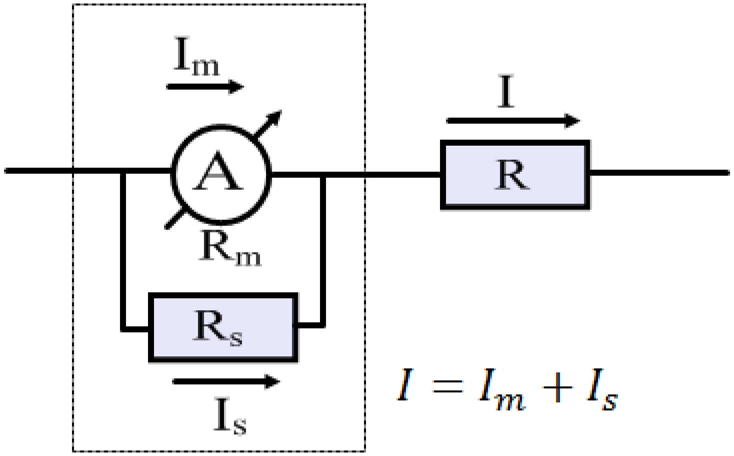
Áram és feszültségmérés

Ampermérőt sorba kell a mérendő elemmel kapcsolni. Kis ellenállása legyen.

Voltmérőt párhuzamosan kell a mérendő elemmel kapcsolni. Nagy ellenállása legyen.

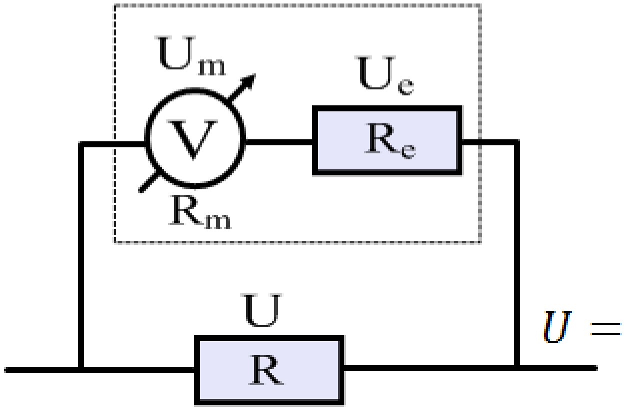
<u>Méréshatár kiterjesztése</u>:

sönt ellenállás



$I = I_m + I_s$

előtét ellenállás



$U = U_m + U_e$

$$\frac{I_m}{I_s} = \frac{R_s}{R_m} \quad \rightarrow \quad I_s = I_m \frac{R_m}{R_s}$$

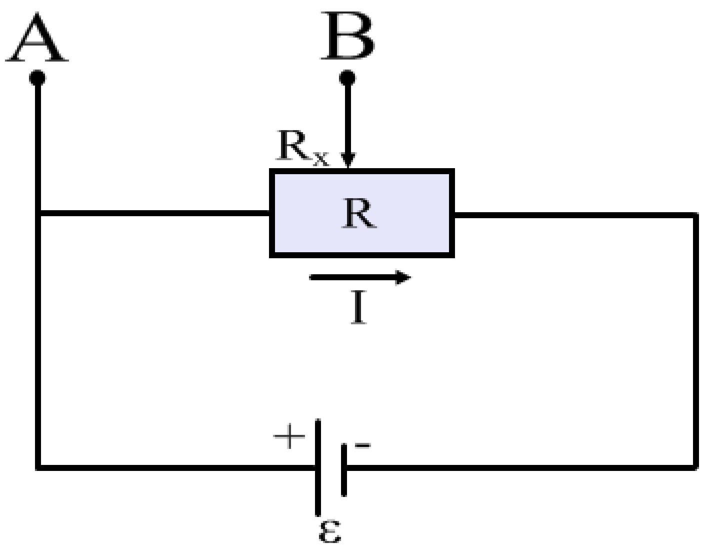
$$\frac{U_m}{U_e} = \frac{R_m}{R_e} \quad \rightarrow \quad U_e = U_m \frac{R_e}{R_m}$$

$$I = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)$$

Feladat: 5

$$U = U_m \left(1 + \frac{R_e}{R_m}\right)$$

Feszültségosztó (potenciométer)



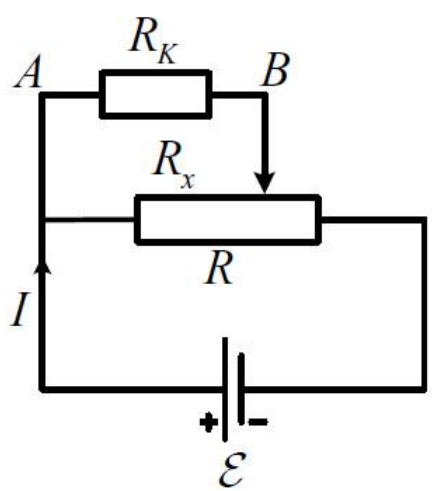
A főkörben folyó áram: $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$

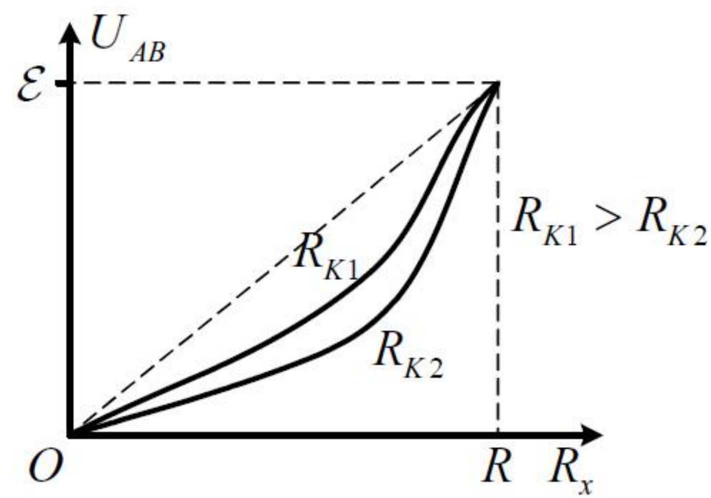
Az R_x ellenálláson eső feszültség:

$$U_{AB} = R_x I = \varepsilon \frac{R_x}{R} = \varepsilon \frac{x}{l}$$

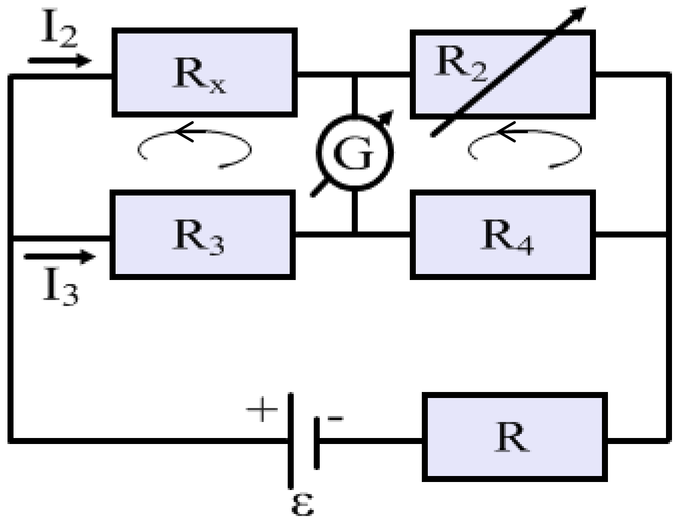
ahol x az R_x és l a teljes R ellenállás hossza.

A terheletlen feszültségosztó karakterisztikája tehát lineáris függvénye az x-nek, de a terhelt feszültségosztó esetében ez a kapcsolat már nem lesz lineáris!





Ellenállás mérése Wheatstone-híddal



R_x: ismeretlen ellenállás
R_2: szabályozható ellenállás
R: védőellenállás
G: galvanométer (érzékeny árammérő)

Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk amíg a galvanométer nullát nem mutat. Ekkor rajta áram nem folyik, a híd ki van egyenlítve, és az R_x meghatározható:

Kirchhoff II. törvényét felírva a két hurokra:

$$I_2R_x - I_3R_3 = 0$$

$$I_2R_2 - I_3R_4 = 0 \ \rightarrow \ I_2 = I_3\frac{R_4}{R_2}$$

Beírva az első egyenletbe:

$$I_3\frac{R_4}{R_2}R_x - I_3R_3 = 0$$

$$R_x = R_2\frac{R_3}{R_4}$$

A stacionárius áram munkája és teljesítménye

Ha egy fogyasztó kivezetései között a feszültség U és rajta t idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor az elektromos tér által végzett munka:

$$W = QU = ItU$$

Az elektromos energia eközben hővé alakul és a fogyasztót melegíti.

Az ehhez a munkához szükséges energiát általában az áramforrás biztosítja.

Ha a fogyasztó R ellenállása nem nulla, akkor hő mindig keletkezik. Erre az R ellenállásra a munkát a Joule-törvény adja meg:

$$W = ItU = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$$

innen a teljesítmény: $P = UI = I^2R = \dfrac{U^2}{R}$

Homogén drótban leadott teljesítményt osztva a $V = Al$ térfogattal kapjuk a Joule-törvény differenciális alakját:

$$\frac{P}{V} = \frac{UI}{V} = \frac{El \cdot jA}{Al} = Ej$$

Más formákban: $p_J = \vec{E} \cdot \vec{j} = \sigma E^2 = \rho j^2$

Feladat: 6

Az ellenállást befolyásoló tényezők*

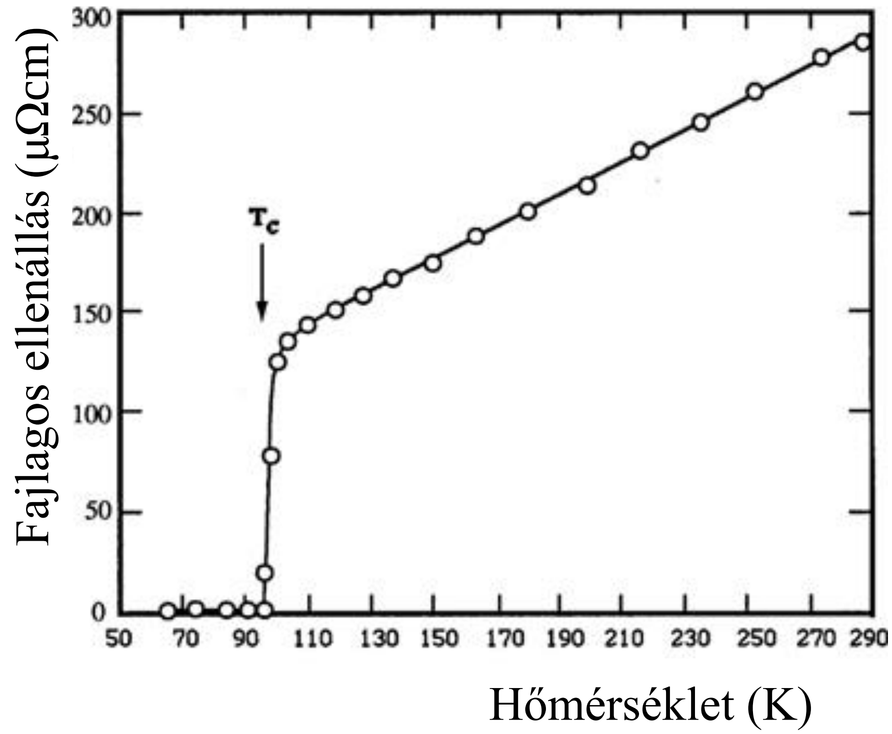
1. anyagi minőség
2. mechanikai feszültség (összenyomáskor általában csökken, nyújtáskor nő)
3. hőmérséklet (fémeké és ötvözeteké nő, félvezetőké, elektrolitoké csökken)

Meglehetősen tág hőmérsékleti tartományban a fémek fajlagos ellenállása a hőmérsékletnek lineáris függvénye:

$$\rho(T) = \rho(T_0)\{1 + \alpha(T - T_0)\}$$ ahol α a hőmérsékleti együttható.

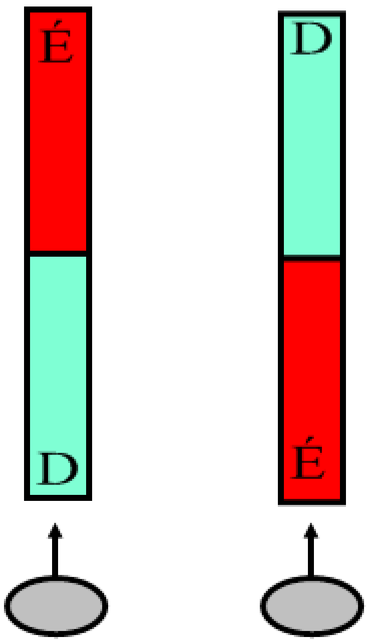
<u>Szupravezetők</u>: Egyes fémek és egyéb anyagok (pl. speciális kerámiák) fajlagos ellenállása egy bizonyos T_C kritikus hőmérséklet alatt nullára esik.
Ezekben az anyagokban külső tér nélkül is folyhat áram.
Mivel R = 0, a hőveszteség is nulla.
Felhasználás:

- nagy erősségű mágnesek tekercselésénél
- elektromos tápvezetékeknél

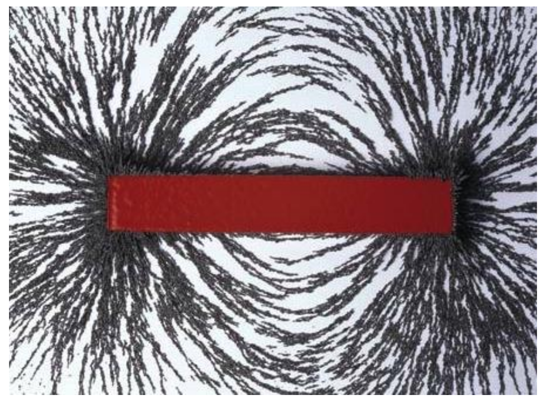


Mágneses alapjelenségek

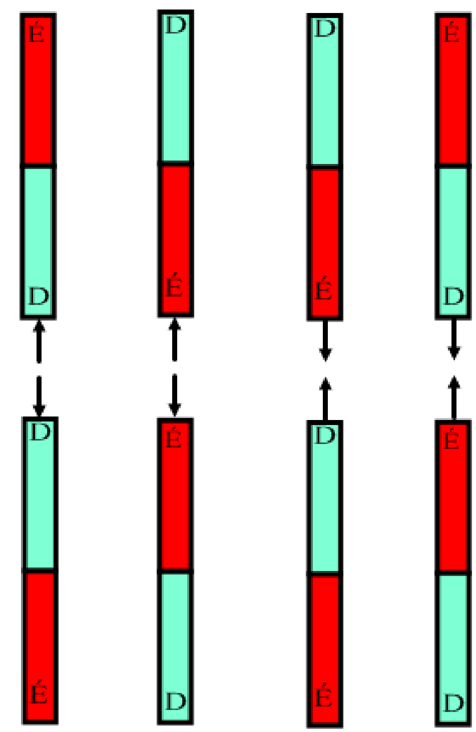
Bizonyos vasércek képesek apró vasdarabokat magukhoz vonzani: **permanens mágnes**



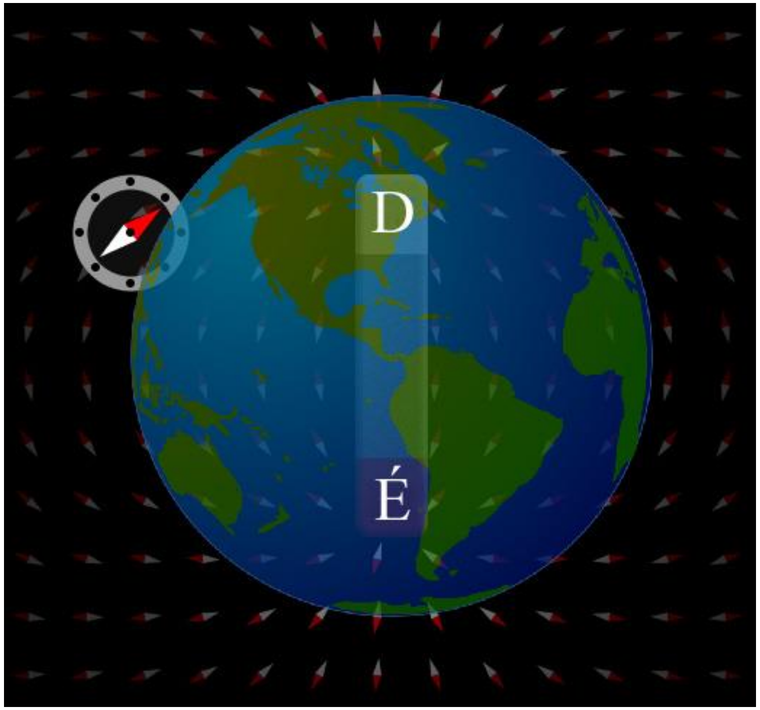
Az acélrúd felmágnesezhető ilyen ércek segítségével.
Rúd két vége: **pólusok** (a vasreszelék csak ide tapad)



Kétféle pólus - azonosak között taszítás,
ellentétesek között vonzás:



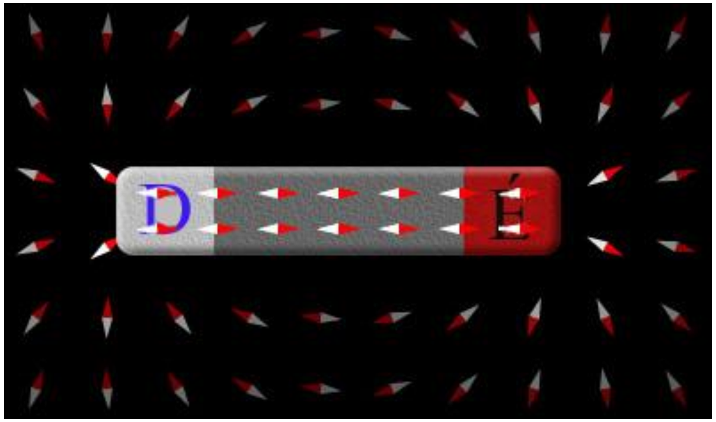
A Föld mágneses tere



Mágnestű északi pólusa észak felé fordul a Föld mágneses tere miatt.
(a Föld mágneses terének **déli** pólusa irányába)

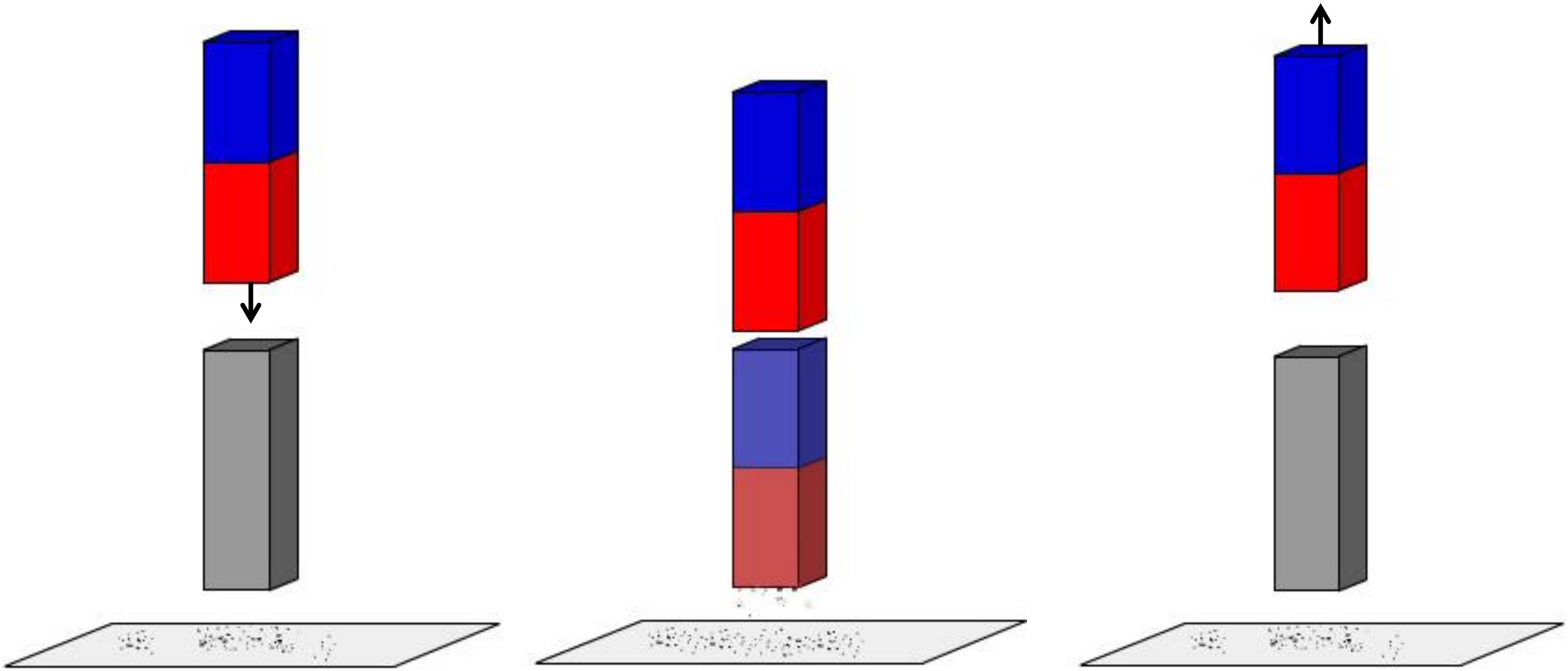
Szimulációk idekattitva!

Északi és Déli pólusok mindig együtt vannak jelen, magányos pólusok nem fordulhatnak elő.
Rúd mágnest kettévágva a kisebb daraboknak is lesz két pólusa.



Mágneses polarizáció

Közelbe helyezett mágnes rúd hatására a lágyvas mágnesessé válik. Eltávolítva a mágnest a mágneses tulajdonság megszűnik.

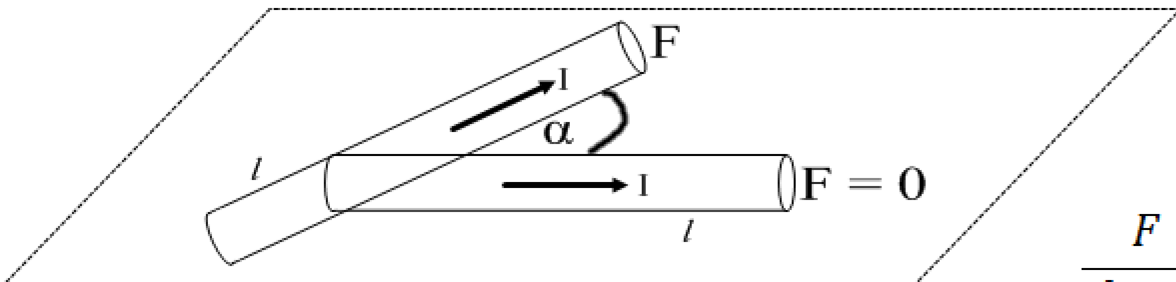


[Animáció idekattintva!]

Ampere-erő, a mágneses indukcióvektor

Árammal átjárt vezető közelébe helyezett mágnestű elfordul. A mozgó töltés tehát nemcsak elektromos, hanem mágneses teret is kelt. A mágneses tér pedig a mozgó töltésekre (Lorenz-erő) illetve áramjárta vezetőkre erőt fejt ki (Ampere-erő).

Homogén mágneses térben egy bizonyos irányban a vezetőre ható erő nulla.



Egyébként: $F \sim I$

$F \sim l$

$F \sim \sin\alpha$

$\dfrac{F}{Il\sin\alpha}$ már csak a mágneses térre jellemző.

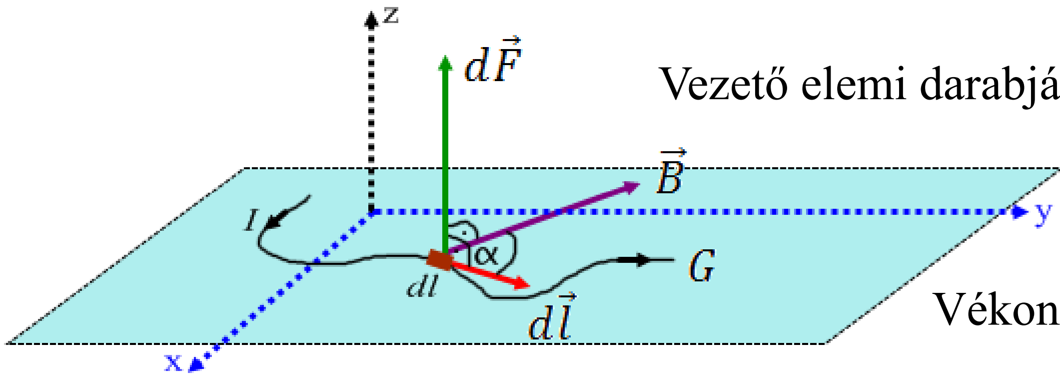
A **mágneses indukció** nagyságát tehát definiálhatjuk mint: $B = \dfrac{F}{Il\sin\alpha}$

Iránya párhuzamos a vezetővel az F = 0 esetben, és úgy mutat, hogy az $\{\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}\}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkossanak.

Homogén térben lévő egyenes vezetőre: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

Az indukció mértékegysége: $[B] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = \dfrac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Am}^2} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{Am}^2} = \dfrac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{Am}^2} = \dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T(tesla)}$

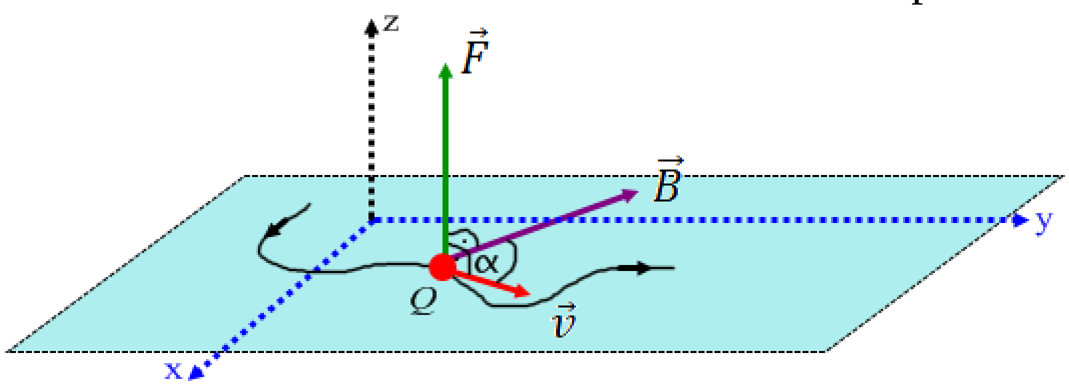
Ampere- és Lorentz-erő általánosan



Vezető elemi darabjára ható erő: $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

Vékony vonalas vezetőre: $\vec{F} = I \int_G \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right)$

Az Ampere-erőt egy darabka egyenes vezetőre felírva:



$$\Delta\vec{F} = I \Delta\vec{l} \times \vec{B} = \frac{Nq}{\Delta t} (\vec{v} \Delta t) \times \vec{B}$$

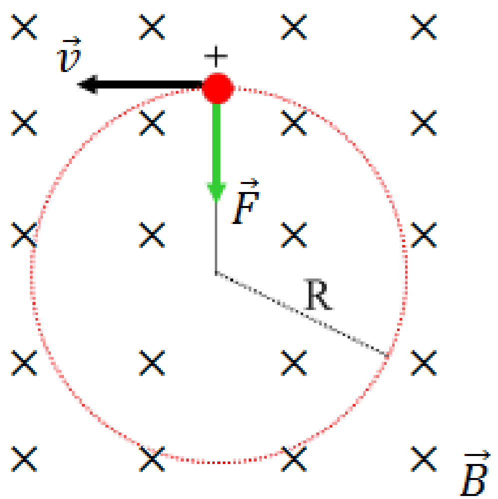
7. feladat

Innen egy töltött részecskére a Lorentz erő: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F} \perp \vec{v}$ tehát a Lorentz-erő munkája nulla. A töltött részecske sebességének nagysága homogén mágneses térben állandó.

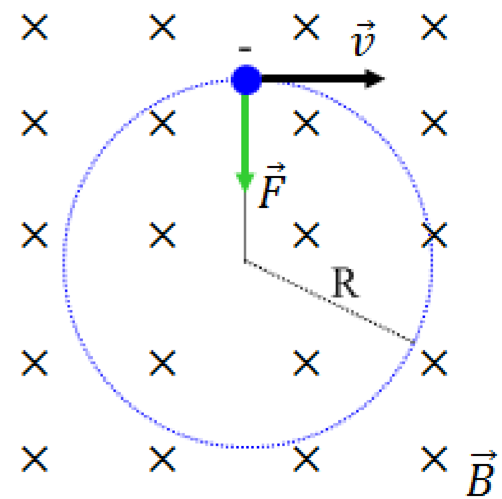
Töltött részecske mozgása homogén mágneses térben

Amennyiben $\vec{v} \perp \vec{B}$, a részecske körmozgást végez állandó sebességgel.



$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$



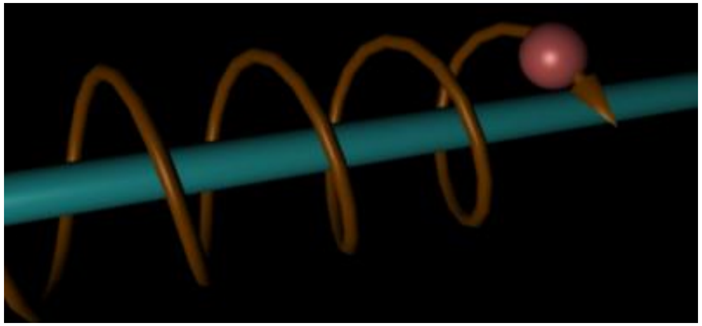
8. feladat

Ha a sebesség nem merőleges a térre, akkor felbontjuk a térrel párhuzamos és arra merőleges részekre:

$v_{\parallel}$ állandó

$v_{\perp}$ nagysága állandó, körmozgás

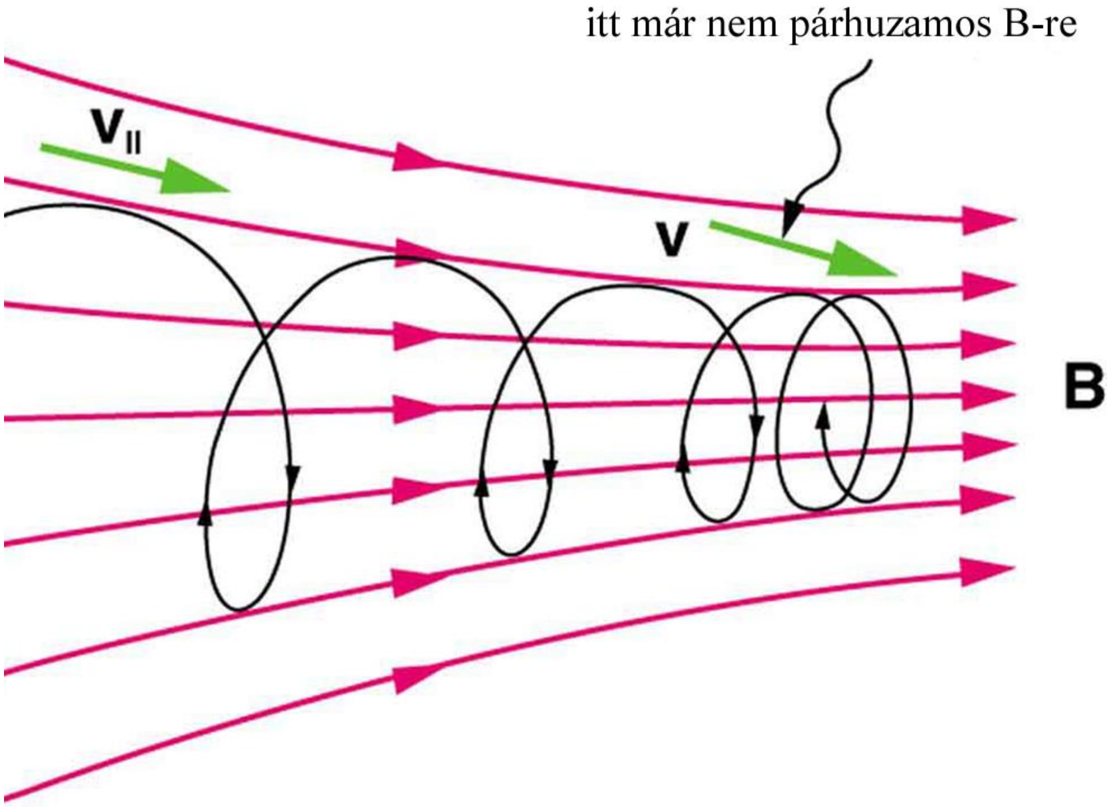
Eredmény: spirális mozgás a mágneses tér indukcióvonalai körül.



Mágneses palack*

Inhomogén mágneses térben spirálalakban mozgó töltött részecskére a csökkenő tér irányába mutató komponense is van az erőnek.

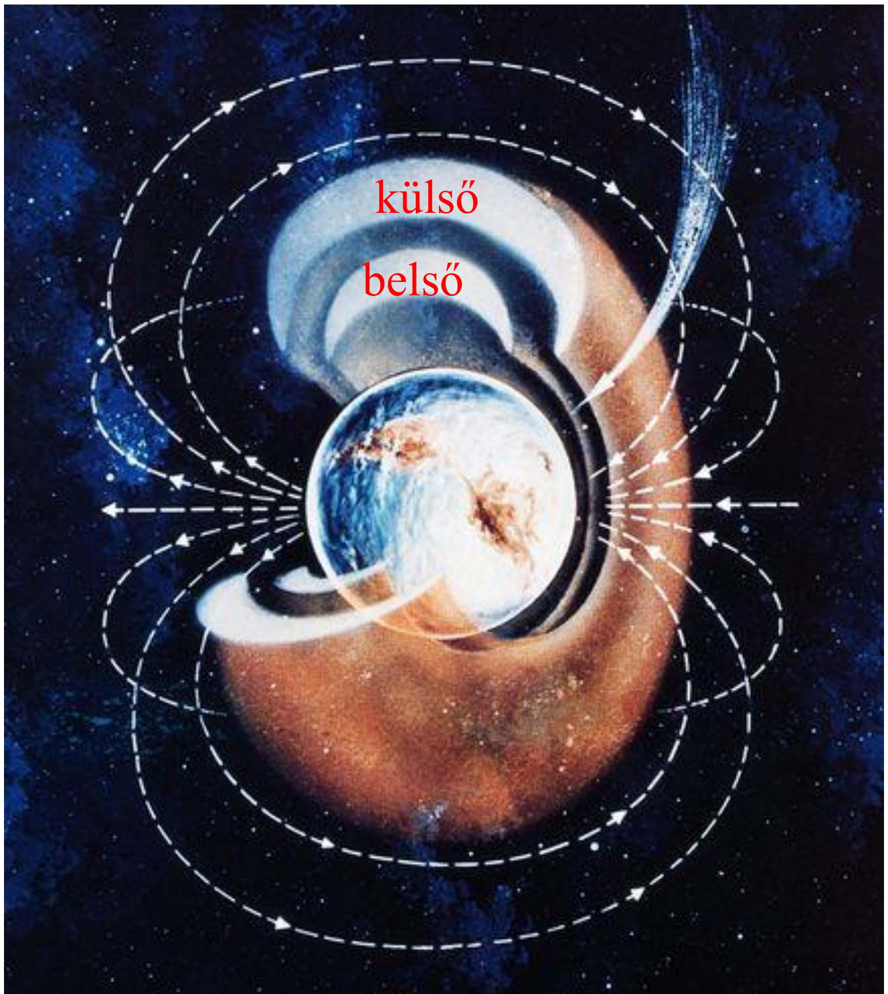
A töltött részecskék csapdába ejthetők egy térrészben melyet erősebb tér zár be mindkét irányból. Ilyen pl. a Föld mágneses tere bizonyos helyeken.



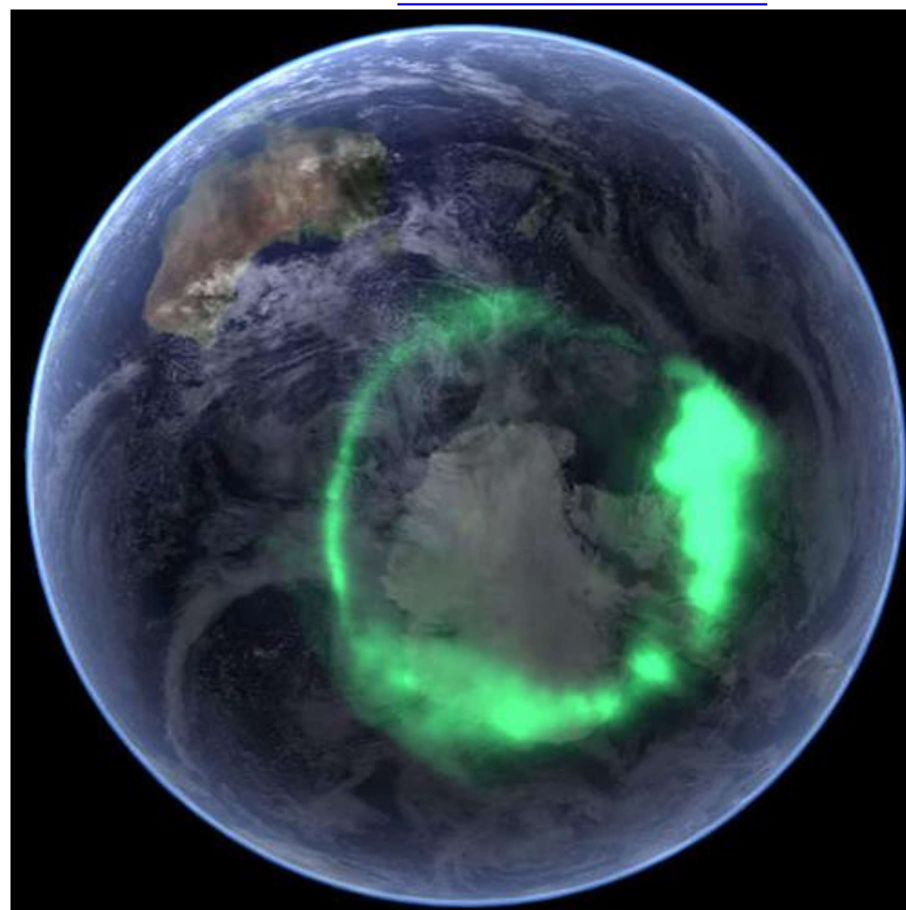
Van Allen övek*

A Napból érkező töltött részecskék a Föld mágneses terében spirál mozgást végeznek és nagyrészük a sarkok közelében lép be a Föld légkörébe jellegzetes **sarki fény**t okozva.

A részecskék egy része felhalmozódik az úgynevezett Van Allen övekben.



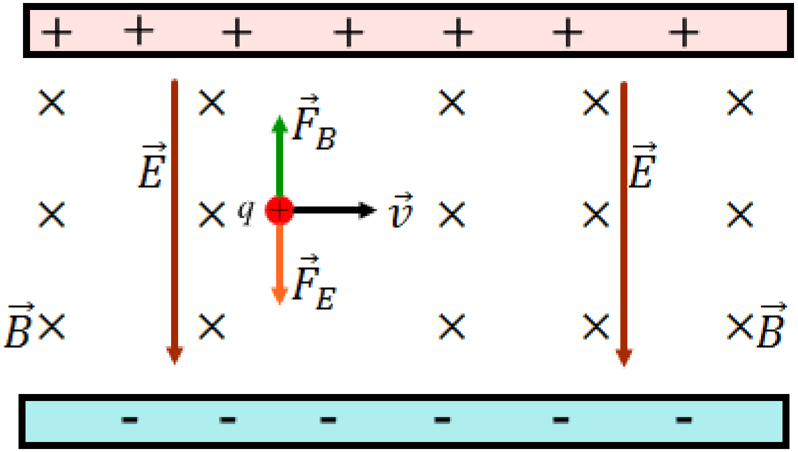
Videó idekattintva!



Részecske elektromos és mágneses térben

Amennyiben elektromos és mágneses tér is jelen van: $\vec{F}_e = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$

Speciális eset: $\vec{B} \perp \vec{E}$ ekkor a Coulomb- és a Lorentz-erő kiejtheti egymást.



$\vec{v} \perp \vec{E}$ és $\vec{v} \perp \vec{B}$

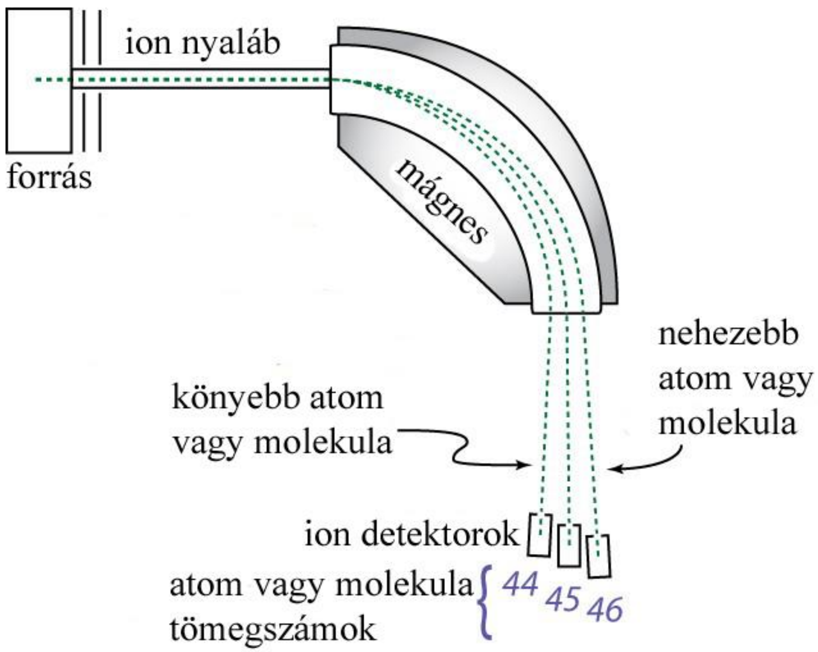
<u>Sebességkiválasztó</u>: csak azok a részecskék tudnak eltérülés nélkül keresztülmenni amelyekre

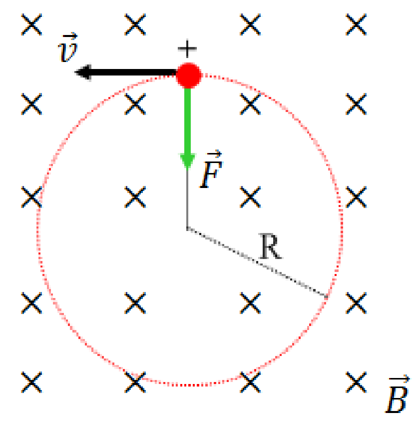
$$qvB = qE$$

Tehát: $v = \dfrac{E}{B}$

Az eltérülő részecskéket egy lemezzel felfogják, ezért csak a kiválasztott sebességű részecskék maradnak a nyalábban. E és B állításával bármilyen sebességű részecskék kiválaszthatók.

Tömegspektrométer*



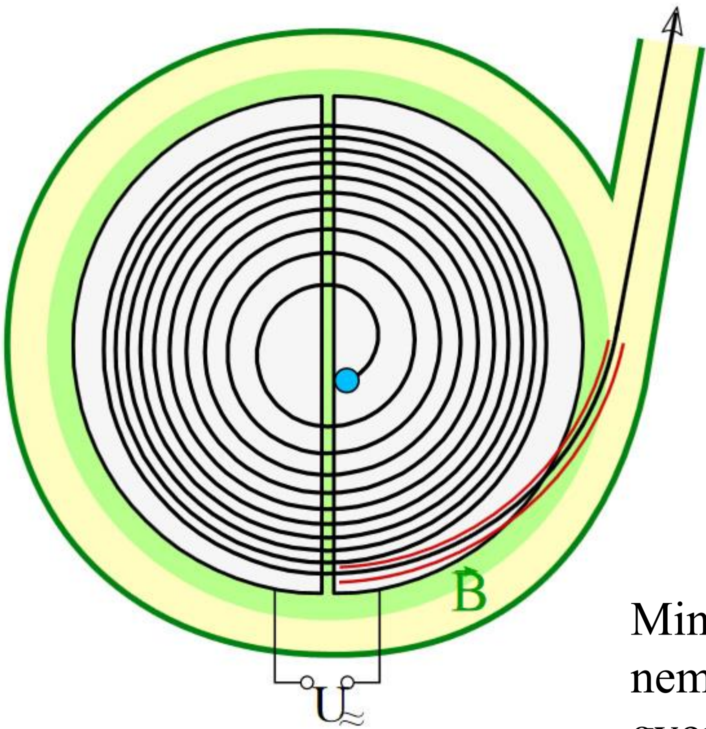


$$R = \frac{mv}{qB}$$

Amennyiben az ionok töltése és sebessége azonos (sebesség kiválasztás után), akkor az eltérülésük mértéke csak tömegüktől függ. Minden egyes atomtömeg eltérülési helyére tett ion detektorok jele megmondja a vizsgált anyag összetevőinek arányát (spektrum).

Ciklotron*

A duánsok közötti feszültség minden áthaladáskor gyorsítja a töltött részecskét.
Ahogy nő a részecske sebessége (energiája), úgy nő a körpálya sugara.
Végül a felgyorsított részecske kilép a ciklotronból néhányszor 10 MeV energiával.



$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

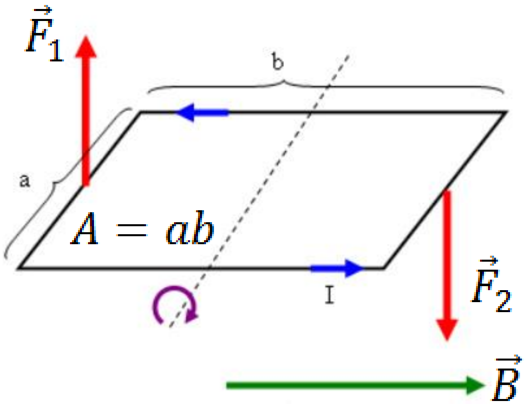
$$R = \frac{mv}{qB}$$

A periódusidő: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$

Mint látható a periódusidő állandó, tehát
nem kell változtatni a feszültség frekvenciáját
gyorsítás közben.

[Videó idekattintva!]

Áramhurokra ható forgatónyomaték

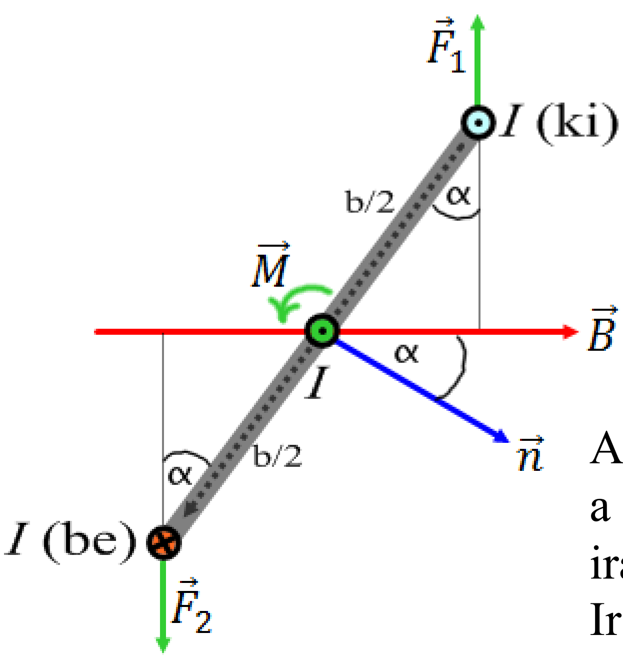


Homogén mágneses térben lévő egyenes vezetőre, amikor a tér a hurok síkjában van: $F_1 = F_2 = F = IaB$

Az eredő erő nulla, de a forgatónyomaték nem.

$$M = 2F\frac{b}{2} = IaBb = IAB$$

Tetszőleges orientáció esetén a forgatónyomaték: $M = F_1\frac{b}{2}\sin\alpha + F_2\frac{b}{2}\sin\alpha$



$$F_1 = F_2 = F$$

$$M = Fb\sin\alpha = IaBb\sin\alpha = IAB\sin\alpha$$

Az irányokat is figyelembe véve:

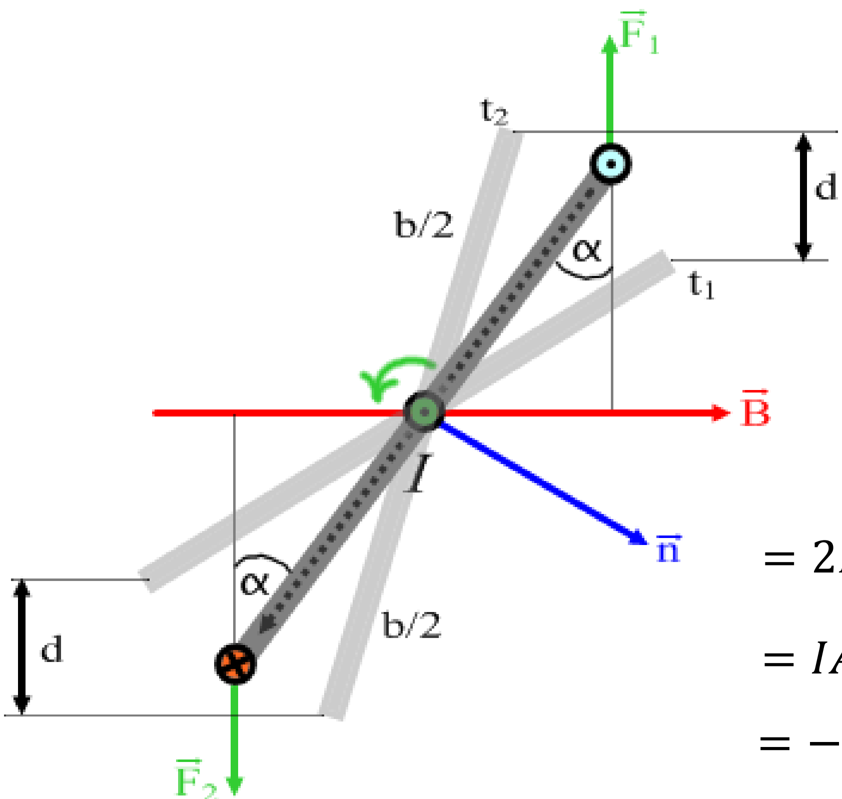
$$\vec{M} = IA\vec{n}\times\vec{B} = I\vec{A}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B}$$

$\vec{m} = I\vec{A}$ a **mágneses dipólmomentum** $[m] = \mathrm{Am}^2$

A forgatónyomaték akkor szűnik meg ha a dipól befordult a mágneses indukció irányába (stabil egyensúly, ellenkező irányban pedig labilis egyensúly!).
Iránytűként használható egy áramjárta hurok is.

9. feladat

Áramhurok potenciális energiája*



Számítsuk ki a kereten végzett munkát a t_1 és t_2 időpontok között, miközben a normális és a mágneses indukció közötti szög α_1-ről α_2-re változik (csökken):

$$F = F_1 = F_2 = IaB$$

$$W_{12} = 2Fd = 2IaB\left(\frac{b}{2}\cos\alpha_2 - \frac{b}{2}\cos\alpha_1\right) =$$

$$= 2IaB\frac{b}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = IabB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) =$$

$$= IAB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = mB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) =$$

$$= -mB\cos\alpha_1 + mB\cos\alpha_2$$

Látható, hogy amennyiben: $E_P = -mB\cos\alpha = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

akkor a végzett munka felírható a konzervatív erőterekre jellemző formában:

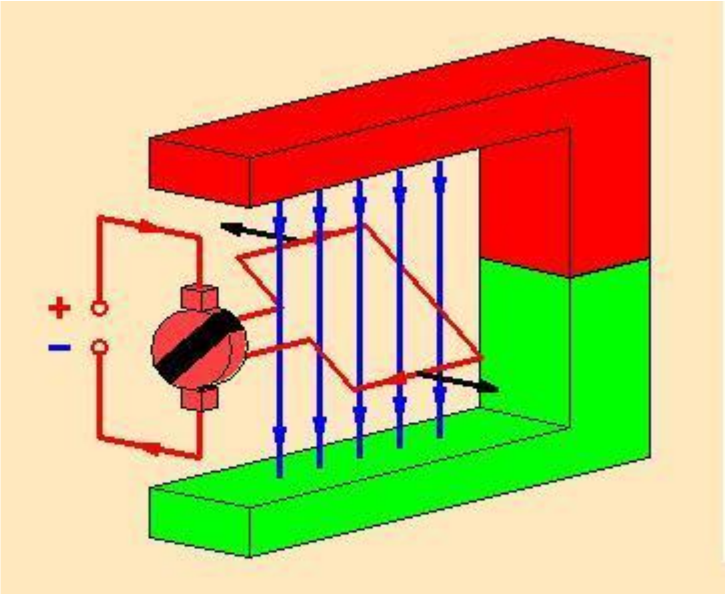
$$W_{12} = E_{P1} - E_{P2}$$

9. feladat

Kétfázisú elektromotor*

A forgó hurok két kivezetése a szigetelővel elválasztott fél-hengerhez csatlakoznak.

Az egyenfeszültség alá helyezett kefék minden félfordulatnál a másik fél-hengerhez csatlakoznak.



A homogén mágneses tér az áramjárta hurkot a stabil egyensúlyi helyzetbe igyekszik beforgatni.

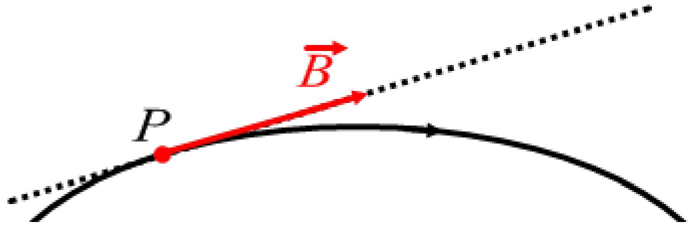
Amire azonban a hurok elérné a stabil egyensúlyi helyzetet a polaritás megfordul.

Mivel az áram ellenkező irányba folyik, a stabil egyensúlyi helyzet a labilis egyensúlyi helyzetté válik.

A labilis egyensúlyi helyzeten a lendület miatt túlfordulva a hurok igyekszik tovább-fordulni a stabil egyensúlyi helyzetbe, azonban ott ismét felcserélődik a polaritás…

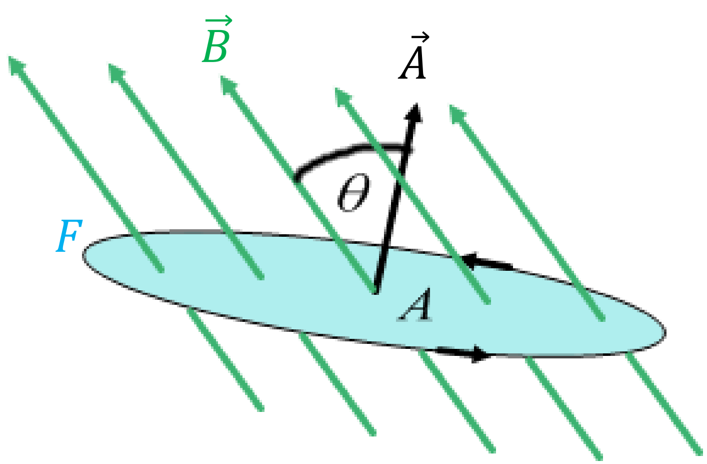
Mágneses-indukciófluxus

A mágneses mező szemléltetésére a mágneses indukcióvonalakat használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintője egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral.



A mágneses indukció nagyságát az indukcióvonalak sűrűsége jellemzi.
A vonalakra merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal halad át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

<u>Mágneses-indkciófluxus:</u> Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén:

$$\Phi = BA\cos\theta = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

Mértékegysége: $\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{m}^2 = \mathrm{Vs} = \mathrm{Wb}$ (weber)

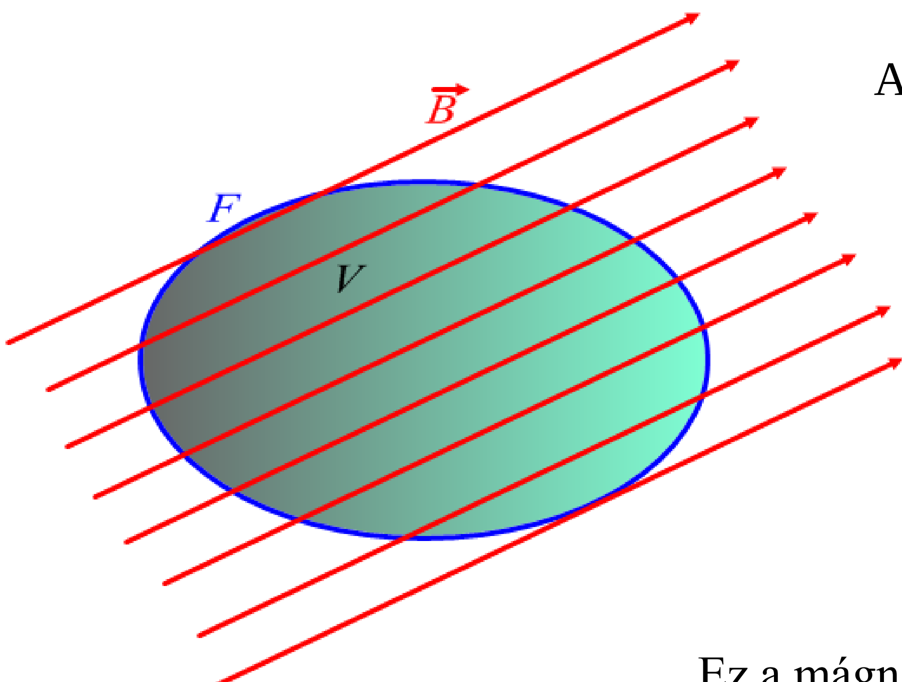
Ha nem homogén az indukció, és/vagy nem sík a felület, akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük:

$$\Phi = \int_F \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

Mágneses Gauss-törvény

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek (a térnek nincsenek forrásai), így a zárt felületre számított mágneses-indukciófluxus zérus. A térfogatba bemenő indukcióvonalak száma megegyezik a kijövő vonalak számával.

A mágneses Gauss-törvény integrális alakja: $$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



A Gauss-Osztogradszkíj tétel alkalmazásával:

$$0 = \oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) dV$$

Mivel ez egy tetszőleges P pont körüli tetszőlegesen kicsi térfogatra igaz, csak úgy teljesülhet, ha a tetszőleges P pontban:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ez a mágneses Gauss-tétel differenciális (lokális) alakja.
A mágneses tér forráserőssége bármely pontban nulla.

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincs végük, önmagukba záródnak.
A mágneses tér forrásmentes, viszont örvényes.

Vektorpotenciál

Mivel a mágneses Gauss-törvény differenciális alakja: $\operatorname{div}\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$

Vektoranalízisből ismert összefüggés szerint pedig: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Ezért mindig létezik olyan vektorfüggvény, amellyel a mágneses indukció felírható:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{alakban}$$

Az $\vec{A}$ vektorfüggvény a **vektorpotenciál**.

Ez hasonló ahhoz, mint amikor az elektrosztatikában az elektromos térerősséget felírhattuk a potenciál segítségével:

$$\vec{E} = -\nabla U$$

Ez a következő összefüggés miatt volt lehetséges:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}U = \nabla \times (\nabla U) = 0$$

Mindkét összefüggés a koordináták szerinti deriválások felcserélhetősége miatt teljesül.

Mágnesezettség és mágneses térerősség

Az anyagok mágneses tulajdonságai túlnyomó részben az elektronok mágneses dipólmomentumára vezethetők vissza:

1. Az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
2. Saját mágneses momentuma is van ami a spinből adódik

A mágneses polarizáció során ezek az atomi dipólmomentumok igyekeznek egy irányba (külső tér irányába) beállni és ezáltal erősíteni egymás hatását.

A **mágnesezettség** vektor a *P* pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses dipólmomentumot:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i}{\Delta V} \qquad [M] = \frac{\mathrm{Am}^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

A **mágneses térerősség** a $\vec{B}$ és az $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációjaként definiált:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad [H] = [M] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ a vákuum permeabilitása.

Anyagegyenlet

Az anyagegyenlet megadja az $\vec{M}$ mágnesezettség és a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot.

Amennyiben $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$ is igaz. Legtöbb izotróp közegben a lineáris

anyagegyenlet teljesül, vagyis $\vec{H} \parallel \vec{M}$ és $\vec{H} \sim \vec{M}$

Az arányossági tényező a χ mágneses szuszceptibilitás: $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Ezt felhasználva a mágneses indukcióra:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_0(\chi + 1)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

Ahol $\mu_r = \chi + 1$ a relatív permeabilitás, és

a $\mu = \mu_0\mu_r$ az abszolút permeabilitás.

Az elektromágneses tér energiája

Az elektromos tér energiasűrűsége korábbról: $w_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

Hasonlóképpen, a mágneses tér energiája: $w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

A tér egy adott pontjában az elektromos és mágneses terek együttes energiasűrűsége tehát (amennyiben mindkettő jelen van):

$$w_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

A pont egy (elegendően) kicsiny ΔV térfogatú környezetében lévő energia:

$$\Delta W_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)\Delta V$$

Amennyiben az energiasűrűség nem homogén, egy véges térfogatban lévő energiát térfogati integrállal számolhatjuk:

$$W_{EM} = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV$$