Szükségünk lesz a következő matematikai azonosságokra, melyek bizonyítása szorgalmi feladat:

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$$

$$\mathrm{rot}(f\cdot\vec{v})=\mathrm{grad}f\times\vec{v}+f\cdot\mathrm{rot}\vec{v}$$

$$\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{rot}\,\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{rot}\,\vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}-\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$$

MÁGNESESSÉG

Bevezetés, alapfogalmak

Az **Ampère-erő**:

$$\boxed{\vec{F}=\mathrm{I}\vec{\ell}\times\vec{B}}$$

Ha a vezető nem egyenes, vagy a tér nem homogén, akkor kicsi $\Delta\vec{r}$ darabokra kell osztani a vezetőt. Az ilyen darabokra ható erő:

$$\Delta\vec{F}=\mathrm{I}\Delta\vec{r}\times\vec{B}$$

Általában (ha a vezető nem egyenes, vagy a tér nem homogén) egy vékony vonalas vezetőre ható erőt a vezetőszakaszra való integrálással kaphatjuk meg:

$$\vec{F}=I\int(d\vec{r}\times\vec{B})$$

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a vezetőben folyó I áram azt jelenti, hogy N db q töltésű elektron ugyanazon v sebességgel halad az ℓ hosszúságú vezetőben, (azaz ugyanazon Δt idő alatt teszi meg az ℓ távolságot) ekkor I=Nq/Δt és v= ℓ /Δt. Ezeket az Ampere-erő képletébe beírva az N db elektronra ható erő:

$$F=B\mathrm{I}\ell=BNq\cdot\ell/\Delta t=BNqv$$

Vagyis az egy elektronra ható erő

$$F=qvB$$

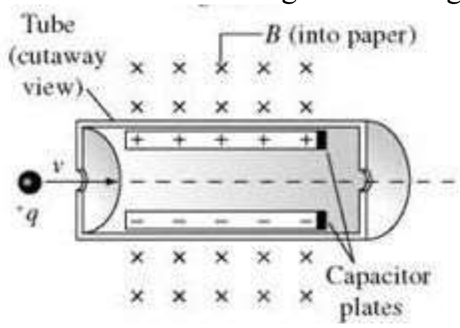
Általánosan egy $\vec{\mathrm{B}}$ mágneses térben $\vec{\mathrm{v}}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ható erő, az ún. **mágneses Lorentz-erő**:

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}}=\mathrm{q}\,\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}}}$$

Alkalmazások:

1. Sebességszűrő.

Néhány berendezés olyan részecskenyalábbal működik, amelyben a részecskék sebességének nagysága és iránya állandó, ehhez a nyalábot szűrni kell. Erre szolgál a sebességszűrő:



Az egymásra és a sebesség vektorára is merőleges E és B tér által töltött részecskére ható két erő egymással ellentétes irányú. A Lorentz-erő és az elektrosztatikus erő abban az esetben ejti ki egymást, ha

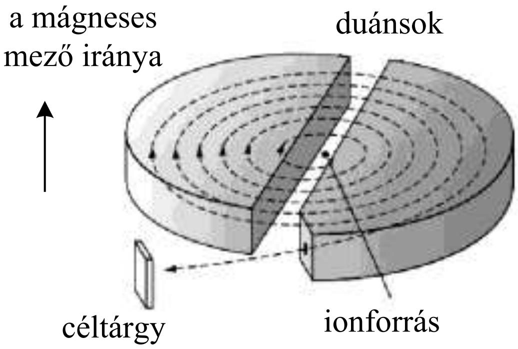
$$qE = qvB$$

Tehát azok a részecskék jutnak át a sebességszűrőn (nem változik a pályájuk), amelyeknek a sebessége:

$$v = \frac{E}{B}$$

Mint láttuk, a töltés nem szerepel a végképletben, vagyis töltött részecskék esetén töltésüktől függetlenül ugyanazt a sebességet választja ki a berendezés.

2. Ciklotron. A Lorentz-erőnek fontos szerepe van akkor, amikor töltött részecskéket akarnak eltéríteni, illetve gyorsítani. A ciklotron egy olyan részecskegyorsító, amiben a Coulomb erőt használják a sebesség nagyságának növelésére és a Lorentz erőt a részecske körpályán tartására.



A ciklotron részecskegyorsító vázlata

A töltött részecskék gyorsítása a két „duáns” között történik, amelyekre váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek frekvenciáját úgy számítják ki, hogy mindig gyorsítsa a részecskét, azaz amikor a részecske a duánsok között van, akkor az a duáns, amely felé éppen repül, vonzóerőt fejt ki rá. Az alkalmazott homogén mágneses mező pedig körpályára kényszeríti a részecskét, vagyis a centripetális erőt a Lorentz-erő adja:

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{QB},$$

tehát ahogy gyorsul a részecske, úgy kerül a középponttól távolabb. A körmozgás periódusideje:

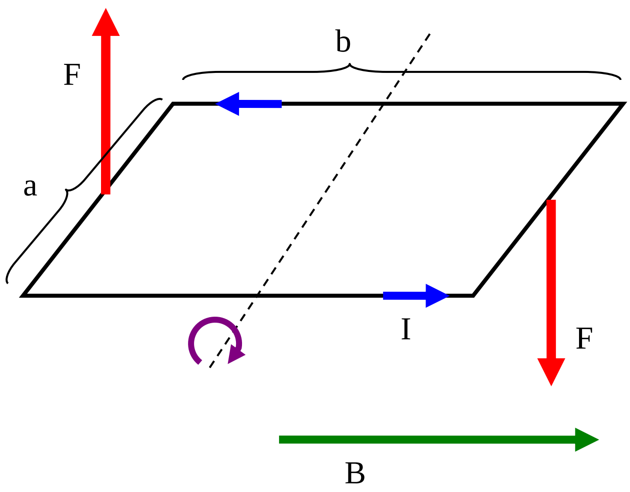
$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi m}{QB}$$

Vagyis a periódusidő (és ezzel a körfrekvencia) a sebességtől és a pálya sugarától független állandó. Ez azért fontos, mert így állandó frekvenciájú feszültséget lehet a duánsokra kapcsolni a gyorsításhoz. Ezekkel a berendezésekkel (és más típusú gyorsítókkal) egyrészt a természetben végbemenő radioaktív bomlásoknál jóval nagyobb sebességű (és így jóval nagyobb mozgási energiájú) részecskéket lehet előállítani (sok reakcióhoz ez szükséges). Másrészt el lehet érni, hogy a részecskékből álló nyaláb monoenergiás legyen, azaz mindegyikük sebessége kb. ugyanakkora legyen. Ezt a berendezést főleg orvosi diagnosztikában használt izotóptermelésre használják, például ${}^{131}_{53}I$ jód izotópot állítanak elő, valamint anyagvizsgálatra, illetve magfizikai alapkutatásra.

Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra

Vegyünk egy egyszerű esetet, egy téglalap alakú áramhurkot, amelyben pozitív irányba folyik az áram (kék nyíl). A téglalap oldalai legyenek *a* és *b*, a terület *A*=*ab*. A mágneses indukció (zöld nyíl) homogén és a *b* oldallal párhuzamos. Ekkor a két *a* hosszúságú oldalra egyenként B*Ia* erő hat (piros nyilak), amelyek ellentétes irányúak. A *b* hosszúságú oldalakra nem hat erő, tehát *az eredő erő nulla*.

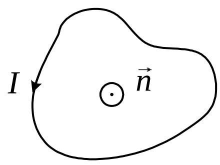
Általánosan is igaz a következő állítás: homogén mágneses térben nyugvó zárt áramhurokra nem hat mágneses erő.
A forgástengelyt az egyszerűség kedvéért a középpontban véve (szaggatott vonal), a két erő ugyanarra forgat (lila görbe nyíl), mindkettő erőkarja *b/2*.



Az eredő forgatónyomaték $2 \cdot BIa \cdot b/2 = BIab = BIA$.
Belátható, hogy ez a nyomaték az áramhurok alakjától független és az általános összefüggés:

$$\vec{M}_{forg} = I\vec{A} \times \vec{B},$$

ahol $\vec{A} = A\vec{n}$ a felületvektor melynek irányítását jobb kéz szabály szerint adhatjuk meg. A kicsiny sík áramhurokban folyó áram iránya és a felületi normális iránya a jobbcsavar szabály szerint kapcsolódik össze.



A felületi normális iránya

Megállapodás szerint az itt bemutatott jelölés $\odot$ a felületből kifelé mutató vektort jelent, a felületbe befelé mutató vektort pedig a következő módon jelöljük: $\otimes$.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot már korábban láthattuk:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ennek analógiájára az áramhuroknak mágneses dipólnyomatékot vagy dipólmomentumot tulajdonítunk:

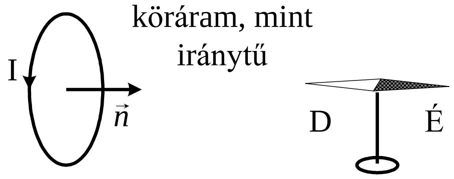
$$\vec{M}_{forg} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B},$$

ahol $\vec{m} = I\vec{A}$ az áramhurok **mágneses dipólmomentuma**, melynek mértékegysége: $[\vec{m}] = Am^2$

A permanens mágneses dipólusra (mágnestűre) ható forgatónyomaték hasonlóan:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Az $\vec{m}$ mágneses dipólnyomaték abszolút értéke attól függ, milyen erősen van felmágnesezve a mágnestű. A dipólusra ható forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{m} \parallel \vec{B}$. Vagyis a forgatónyomaték hatására a mágneses momentum (ha más hatás ezt nem akadályozza) befordul a tér irányába, mert ez jelenti az energia-minimumot[1]. A kis áramjárta hurok tehát iránytűként használható. Úgy tekintjük, hogy a mágneses momentum vektora a déli pólustól az északi felé mutat.



Permanens mágneses dipólus, és köráram hasonlósága

Az elektromos dipólusok analógiája felírható a mágneses dipólusok energiája mágneses mezőben:

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Inhomogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra ható erő

Könnyen belátható, hogy *inhomogén* mágneses mezőben az áramhurokra vagy általában a mágneses momentumra ható eredő erő általában nem nulla, hanem az inhomogenitás mértékétől (a térerősség gradiensétől) és a hurok elhelyezkedésétől függ. (Analógia: inhomogén elektromos erőtérben az elektromos dipólusra erő, homogénben csak forgatónyomaték hat.) Vizsgáljuk először egy ugyanolyan téglalap alakú áramhurkot, mint fentebb a forgatónyomaték-számításnál. Tegyük fel, hogy a $\vec{B}$ továbbra is ugyanolyan irányú, csak a jobb oldalon $\vec{B}+\Delta\vec{B}$ nagyságú. Ekkor nem kell sokat számolnunk: egyszerűen a jobb oldali erőt ki kell cserélni $\vec{F}+\Delta\vec{F}$-re, az eredő erő $\sum F = \Delta F = Ia \cdot \Delta B$ lesz. Felhasználva, hogy a mágneses momentum nagysága $|\vec{m}| = AI = abI$, kapjuk, hogy $\sum F = \Delta F = |\vec{m}| \cdot \dfrac{\Delta B}{b}$.

Általános alakú áramhurok esetében az eredő erő kiszámítása bonyolultabb, az Amper-erőt kell a zárt áramhurok mentén integrálni:

$$\vec{F} = I \oint_g (d\vec{r} \times \vec{B})$$

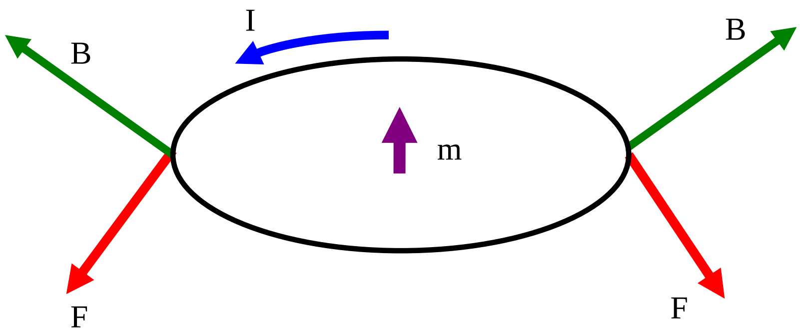
Tehát itt nincs olyan általános, egyszerű formula, amellyel pontosan leírhatnánk ezt az erőt. Kisméretű áramhurokra azt mondhatjuk, hogy az erő egyenesen arányos a mágneses momentummal és a mágneses indukcióvektor gradiensével. A legegyszerűbb közelítés, amit alkalmazni szoktak, az

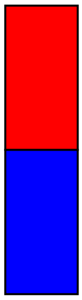
$$\vec{F} = \mathrm{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}).$$

Ez a fenti potenciális energia negatív gradienseként kapható: $\vec{F} = -\mathrm{grad}(E_p) = -\mathrm{grad}(-\vec{m} \cdot \vec{B})$ és pontszerűnek tekintett mágneses momentumokra (pl. elemi részecskékre) pontos.

Vegyünk most egy érdekesebb esetet, amikor egy kör alakú áramhurok alatt egy rúdmágnes van elhelyezve, a keret síkja alatt, rá merőlegesen, szimmetrikusan. Ekkor a mágneses indukcióvektor a vezető egyes kis szakaszain a szakaszra merőleges, kifelé-fölfelé mutat (zöld nyilak). Az vezető szakaszokra ható erők minden pontban a szakaszokra és $\vec{B}$-re merőlegesen, kifelé-lefelé mutatnak (piros nyilak). Az erők vízszintes komponensei a szimmetria miatt kiejtik egymást, ezért az eredő erő lefelé mutat. A keret mágneses momentuma felfelé irányul (kicsi lila nyíl), hasonlóan, mint a rúdmágnes momentuma. Számolás nélkül is megállapíthatjuk tehát, hogy a két azonos irányban álló momentum vonzza egymást. Ha ellentétes irányban állnának, nyilván taszító erő lépne fel.

[1] Megjegyezzük, hogy az atomi mágneses momentumokra is hat forgatónyomaték, de ezek kvantummechanikai okok miatt forogni, precesszálni fognak a $\vec{B}$ iránya körül.





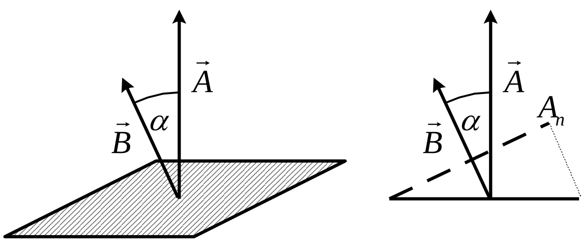
Ellenőrizzük most le az erő irányát az $\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ képlettel a fenti esetre egy kicsinek tekintett dipólusra. A fenti ábrán a B az áramhurok középpontjában felfelé mutat, de értéke lefelé növekszik. Ebből az következik, hogy az $\vec{m} \cdot \vec{B}$ skaláris szorzat pozitív és lefelé növekszik, vagyis az erő lefelé mutat.

Mágneses indukciófluxus és Gauss-törvény

A mágneses mező szemléltetésére a mágneses *indukcióvonalakat* használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral. Megállapodás szerint a mágneses indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal haladjon át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

A mágneses indukciófluxus Φ irányított felületre vonatkozik, és megadja a felületet átdöfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Homogén mágneses mező esetén az A felület indukciófluxusa:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\alpha$$



A felület mágneses mezőre merőleges vetülete

Ha a mágneses mező inhomogén, akkor egy elemi kicsiny felület fluxusa $\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{A}$, egy tetszőleges *A* felület mágneses indukciófluxusa pedig integrálással nyerhető:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek, így tetszőleges zárt felületre számított mágneses indukciófluxus mindig zérus. A **mágneses Gauss-törvény** tehát:

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincsen végük. A törvény differenciális/lokális alakja: $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, vagyis a mágneses indukciónak nincsenek forrásai.

A mágneses polarizáció, a mágnesezettség vektor

A nukleonok (proton, neutron) mágneses dipólnyomatéka sokkal kisebb, mint az elektronoké, ezért egy atom vagy molekula mágneses dipólnyomatéka lényegében megegyezik az elektronok dipólnyomatékának összegével. Az elektronok mágneses dipólnyomatéka két részből áll:

1. pályamozgásból származó mágneses nyomaték, mivel az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető (legalábbis a klasszikus fizika szerint)
2. saját mágneses nyomaték (a spinből adódik)

Az anyag mágnesezettségének jellemzésére vezessünk be egy új vektort. Legyen $\Delta\vec{m}$ a ΔV térfogatban lévő mágneses dipólnyomatékok vektori összege. Definíció szerint a **mágnesezettség** vektora a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses nyomatékot.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$$

Az állandó mágnesek mágnesezettség-vektora is a déli pólustól az északi felé mutat. Mivel a mágnesezettség nem a makroszkopikus áramokkal, az elektronok makroszkopikus elmozdulásával van kapcsolatban, hanem az elektronok atomokon, molekulákon belüli mozgásával, úgy is fel lehet fogni, hogy a mágnesezettséget molekuláris áramok keltik.[2]

Célszerű bevezetni a mágneses térerősséget mint a $\vec{B}$ és a $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációját, mivel rá egyszerű alakú alaptörvény állapítható meg. A $\vec{H}$ mágneses térerősség definíció szerint:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

Itt a $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ univerzális állandó a vákuum permeabilitása.

A $\vec{M}$ mágnesezettség, valamint a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot anyagegyenletnek nevezzük. Első közelítésben B és M között arányosságot feltételezünk, ilyenkor beszélünk lineáris anyagegyenletről. Ha $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$. A legtöbb izotróp közegben a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok nemcsak egyirányúak, hanem a tapasztalat szerint egymással egyenesen arányosak is:

$$\boxed{\vec{M} = \chi \vec{H}}$$

χ a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

$$\vec{B} = \mu_o\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_o\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_o(1+\chi)\vec{H} = \mu_o\mu_r\vec{H},$$

[2] A kvantumfizika, főleg a relativisztikus kvantumfizika kimutatta, hogy az elektron spinje nem kapcsolódik az elektron mozgásához, hanem az elektron elválaszthatatlan tulajdonsága. Azonban erre a tényre a klasszikus elektrodinamika felépítéséhez nincs szükség, a „molekulákon belül folyó áram” koncepcióját pedig még Ampere vezette be 1820 körül.

ahol $\mu_r = 1+\chi$ a relatív permeabilitás, $\mu = \mu_o \mu'$ pedig az abszolút permeabilitás.

Az anyagegyenlet így: $\vec{B} = \mu_o (1+\chi)\vec{H}$, azaz

$$\boxed{\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}}$$

vagy tömörebben $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Nem szabad elfelejteni, hogy ez az anyagegyenlet, csak egy közelítés, amely pl. kemény ferromágneseknél teljesen rossz eredményt ad.

Áramok mágneses tere

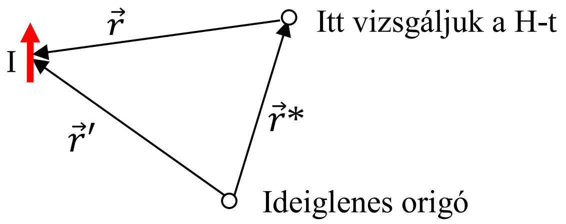
Biot-Savart törvény

Induljunk ki abból a korábban említett tényből, hogy a vektorpotenciálra vonatkozó Poisson-egyenlet egy alapmegoldása az origóban a következőképp néz ki:

$$\vec{A}(0,0,0) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}}{r} dV$$

Ennek rotációját véve megkaphatjuk a B mágneses indukciót: $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

Csakhogy amikor rotációt számolunk, az $\vec{A}$ koordinátái szerint kell deriválni, amelyek most nem változók, hiszen lerögzítettük, hogy nullák. Ideiglenesen bevezetünk egy új koordináta-rendszert, amelyben $\vec{r}* = (x*, y*, z*)$ lesz a vizsgált pont helyvektora (ezek a koordináták nullák voltak), ahol a vektorpotenciált ki szeretnénk számolni, $\vec{r}' = (x', y', z')$ pedig az aktuális, áramjárta térfogatelem helyvektora és koordinátái.



$$\vec{r}' = \vec{r}* + \vec{r}$$

azaz

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}*$$

Az $\vec{r}'$ és $\vec{r}*$ koordináták egymáshoz képest független változónak tekinthetők. Ezzel a fenti egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\vec{A}(x*, y*, z*) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(x',y',z')}{|r'-r*|} dV' = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(x',y',z')}{\sqrt{(x'-x*)^2 + (y'-y*)^2 + (z'-z*)^2}} dV',$$

ahol az integrálás minden olyan térrészre megy, ahol az áramsűrűség nem zérus. Mivel a rotáció-képzés a csillagos koordináták szerinti deriválást jelent, a rotáció operátora a jobb oldalon bevihető az integráljel mögé. Használjuk fel a következő matematikai azonosságot:

$$\text{rot}(f \cdot \vec{v}) = \text{grad} f \times \vec{v} + f \cdot \text{rot}\vec{v}$$

most a $\vec{j}$ vektor felel meg a $\vec{v}$-nek, ami nem függ az x*, y*, és z* változóktól, tehát a második tag kiesik. Ami marad:

$$\text{rot}\frac{\vec{j}(x',y',z')}{|r'-r*|} = \left(\text{grad}\frac{1}{|r'-r*|}\right) \times \vec{j}\,.$$

A $\text{grad}\dfrac{1}{|r'-r*|}$ vektor x komponensét deriválással kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial x*}\frac{1}{\sqrt{(x'-x*)^2+(y'-y*)^2+(z'-z*)^2}}=-\frac{1}{2}\frac{2(x'-x*)(-1)}{\left((x'-x*)^2+(y'-y*)^2+(z'-z*)^2\right)^{3/2}}=\frac{(x'-x*)}{|r'-r*|^3}$$

A többi komponenst is hasonlóan számolva

$$\operatorname{rot}\frac{\vec{j}(x',y',z')}{|r'-r*|}=\frac{\vec{r}\,'-\vec{r}\,*}{(r'-r*)^3}\times\vec{j}\,.$$

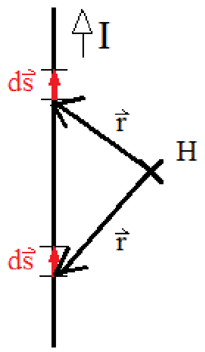
Az ideiglenes koordináta-rendszert és jelöléseket elhagyva, és ezzel az origót ismét a vizsgált pontba helyezve megkapjuk a Biot-Savart törvényt:

$$\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{r}\times\vec{j}}{r^3}dV\,.$$

Ezt eredetileg kísérleti úton, mérésekkel fedeztek fel 1820-ban.

A H-ra vonatkozó alak:

$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{r}\times\vec{j}}{r^3}dV}\,.$$



Ha az áram egyetlen vékony vezetőben folyik, akkor dV helyettesíthető a keresztmetszet és az ívelem-hossz szorzatával, vagyis $\vec{j}dV=\vec{j}Ads=Id\vec{s}$

$$\boxed{\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\int\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3}}\,,$$

ahol a görbe-menti integrálás a vezető teljes hosszára történik.

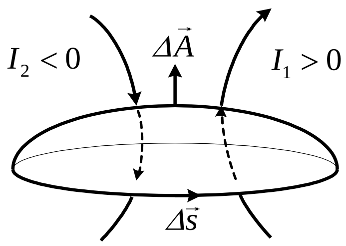
Az ábrán az látható, hogy amikor felfelé folyik az áram és a vizsgált pont jobbra van a vezetőtől, akkor minden elemi $Id\vec{s}$ vektor által keltett $d\vec{H}$ a papír síkjára merőlegesen befelé mutat, tehát az összegük is befelé mutat.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény

Korábban említettük, hogy mozgó töltések mágneses mezőt hoznak létre. A mérési tapasztalatok alapján felállított **Ampère-féle gerjesztési törvény** vékony vonalas áramok esetén azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével:

$$\oint_g \vec{H}\overrightarrow{ds}=\sum_j I_j$$

Az áramerősségek algebrai összegénél az előjelezésre azt a szabályt használjuk, hogy az az áram, amelyik a felületet a felület normálisának irányában döfi pozitív, amelyik azzal ellentétesen döfi, az pedig negatív. Megállapodás szerint, a peremgörbe körüljárási irányát és a felületi normális irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze.



A zárt görbe által körülfogott áramok előjelezése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény írja le az áram és az általa gerjesztett mágneses mező közötti összefüggést. Tapasztalati tény, hogy a gerjesztési törvény akkor is érvényben marad, ha térben mágnesezhető anyagok vannak jelen. A gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$. A stacionárius áram mágneses mezeje tehát **nem örvénymentes**. Az áramba bele kell számítani nem csak a konduktív áramot (vezetési áram, ami pl. a fémekben folyik), hanem a konvektív áramot is. Tehát pl. pozitív ionok áramlanak vákuumban, akkor is mágneses tér gerjesztődik.

Hosszú egyenes vezető mágneses tere

A Biot-Savart törvényből, ill. szimmetria-okokból következik, hogy a térerősség értéke csak a vezetőtől mért távolságtól függ. Az erővonalak körülfogják az áramot, tehát a vezetőre merőleges síkokban fekvő koncentrikus körök, középpontjukban a vezetővel. Ekkor, ha egy ilyen körvonal mentén integrálunk, a $\vec{H}$ nagysága állandó, iránya párhuzamos az ívelemmel, így H kihozható az integráljel elé:

$$\oint_g \vec{H}\vec{ds} = H \oint_g ds = H \cdot 2r\pi = I$$

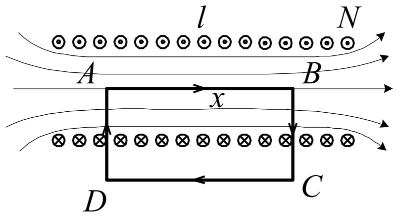
azaz

$$H = \frac{I}{2r\pi}$$

vagyis a mágneses tér erőssége a távolsággal fordítottan arányos..

Tekercsek mágneses tere

Tekintsünk egy, az átmérőjéhez képest hosszú, sűrűn csévélt hengeres egyenes tekercs (**szolenoid**) mágneses terét. A mező homogénnek tekinthető a tekercs belsejében. A tekercs hosszát jelölje *l*, a menetszám legyen *N*, és legyen *A*, a keresztmetszet. Ekkor az egységnyi hosszra jutó menetek száma $\frac{N}{l}$. A tekercsben folyó áramerősség *I*. Egy alkalmasan megválasztott zárt görbére írjuk fel a gerjesztési törvényt. A zárt görbe legyen az *ABCD* téglalap, *x* az AB oldal hossza.



A szolenoid tekercs és mágneses mezeje

A zárt görbére történő összegzést felbonthatjuk négy egyenes szakaszra történő összegzésre:

$$\oint_g \vec{H}\vec{ds} = \int_A^B \vec{H}\vec{ds} + \int_B^C \vec{H}\vec{ds} + \int_C^D \vec{H}\vec{ds} + \int_D^A \vec{H}\vec{ds}$$

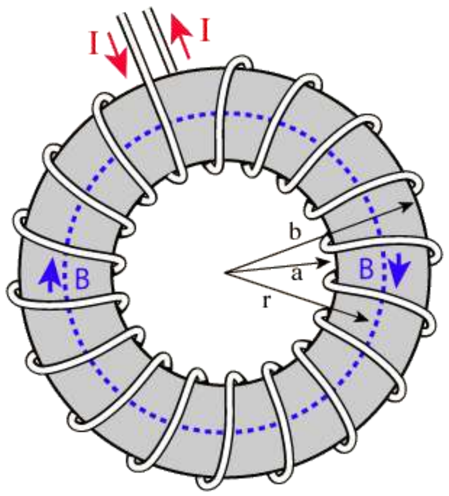
Mivel feltettük, hogy hosszú és vékony a tekercs, a tekercs belsejében összesűrűsödött H vonalak a tekercsen kívül óriási térrészre szóródnak szét. Ebből az következik, hogy a DC szakaszon a tér elhanyagolhatóan kicsi az AB szakaszhoz képest. Az AD és a BC szakaszon pedig a tér iránya merőleges a görbére, másrészt a két görbe egyébként is ellentétes irányítású, tehát ezek az integrálok mindenképp kiesnek. Végül is az összeg csak az AB oldalra nem tűnik el, ahol is jó közelítéssel homogén tér alakul ki, vagyis az integrálás egyszerű szorzássá szelídül. Ebből: $Hx = \frac{N}{l} x I$, azaz

$$\boxed{H = \frac{NI}{l}}.$$

A mindennapokban használt átlagos tekercsekre ez nem mindig jó közelítés, mégpedig azért, mert a tekercsen kívül a tér és ezzel a DC szakaszon számolt integrál nem mindig hanyagolható el.
A mágneses indukció a szolenoid belsejében:

$$B = \mu \frac{NI}{l}.$$

Vagyis a mágneses indukció is az egységnyi hosszra eső menetszámmal arányos.
Ha a szolenoidot behajlítjuk úgy, hogy az eleje és a vége összeér, **toroid**ot kapunk.



Itt hasonló módszerrel számolhatjuk a teret: a zárt görbe menjen a toroid középvonalában, így a hossza a kör kerülete. Az eredmény:

$$\boxed{H = \frac{NI}{2\pi r}}.$$

Ekkor az előbb a szolenoidra kapott közelítés fő hibáját okozó probléma eltűnik, mivel a görbe végig a tekercsen belül halad. Azonban a tér homogenitása a tekercs belsejében némileg elromlik, főleg vastag tekercsre. Tehát a toroidra kapott képlet is a $\frac{d}{r} \to 0$ határesetben egzakt, ahol $d=b-a$ a tekercs vastagsága.

Az elektromágneses indukció

Azt már tudjuk, hogy ha egy mágneses mezőben lévő vezetőben áram folyik, akkor a vezetőre erő hat (Ampère-erő) és az mozgásba lendül. Kérdés, hogy ha mágneses mezőben vezetőt mozgatunk, akkor indukálódik-e áram, ill. általában hogyan tudunk mágneses úton áramot előállítani.

Mozgási indukció

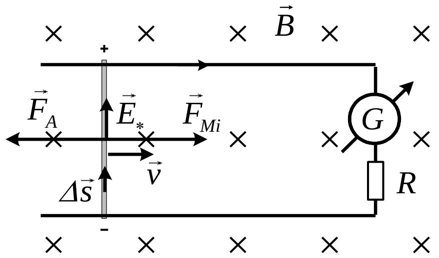
Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat.

Ezt az erőt „idegen” erőnek is nevezik: $\vec{F}_* = q\vec{v} \times \vec{B}$. Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$.

A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}, \Delta\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat *lineáris generátornak* is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát (a rúd sebessége merőleges a mágneses indukcióvektorra és a rúdra), az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) d\vec{s} = \mathrm{v}\, B\, \ell$$

A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R, akkor I=ε/R. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen (ez a Lenz-törvény megnyilvánulása), így azt egy $\vec{F}_\mathrm{h}$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

A fenti elrendezésnél ℓ a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h. Ekkor a hurok területe $A = \mathrm{h}\ell$, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége v=-dh/dt, de mivel ℓ konstans, $\mathrm{dA/dt=d(h\ell)/dt=-}\ell\mathrm{v}$. A mágneses indukciófluxus változási gyorsasága:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d(BA)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{B}\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{B}\ell\mathrm{v} = -\varepsilon\,.$$

Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

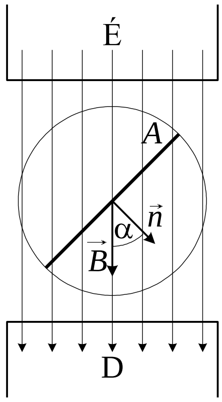
$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (Fluxus-szabály).

A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel. Az is könnyen látható, hogy ha homogén mágneses mezőben egy vezető keret haladó mozgást végez, akkor nem indukálódik benne feszültség.

Váltakozó áramú generátor

Tekintsünk egy téglalap alakú vezető keretet. Keresztmetszete legyen *A*, és forogjon állandó ω szögsebességgel homogén mágneses mezőben. A mágneses mező indukciója legyen $\vec{B}$. A kezdeti pillanatban legyen $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Először írjuk fel a mágneses indukciófluxust mint az idő függvényét:



Váltakozó áramú generátor

$$\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A} = B A \cos\alpha = B A \cos\omega t$$

mivel $\alpha = \omega t$. Alkalmazzuk a Faraday-törvényt az indukált elektromotoros erő kiszámítására:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B A \omega \sin\omega t .$$

Használjuk az $\mathcal{E}_0$ jelölést az elektromotoros erő csúcsértékére $\mathcal{E}_0 = B A \omega$, ezzel

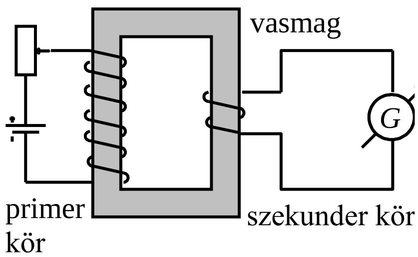
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t ,$$

Azaz szinuszos váltakozó feszültség generálódott.[3] Ha egymenetű keret helyett N menetű tekercset alkalmazunk, akkor az erővonalak mindegyik meneten átmennek, vagyis a fluxus (és annak változási gyorsasága) N-szeresére nő. Tehát a váltakozó áramú generátor elektromotoros ereje:

$$\mathcal{E} = N A B \omega \sin\omega t$$

Nyugalmi indukció

Az előző fejezetben azt kaptuk, hogy egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a mágneses indukciófluxus, azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.



A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust

[3] Ezt egy animáció szemlélteti a Digitális Egyetemen olvasható jegyzetben

változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége.

A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget **kölcsönös indukciónak** nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Azonban a tapasztalat szerint, ha egy adott tekercsben változik az áramerősség és ennek következtében a tekercs fluxusa, akkor ez a változás az adott tekercsben is indukál feszültséget. Ezt a jelenséget **önindukciónak** nevezzük, tehát ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza. Az önindukció miatt létrejött áram az őt létrehozó hatással (a mágneses tér változásával) ellentétes hatást fejt ki, azaz ha a mágneses fluxus csökken, akkor olyan irányú áram indukálódik, amely a fluxust növeli, így az nem csökken olyan gyorsan, mint indukció nélkül tenné. Ezt a szabályt *Lenz-törvénynek* is nevezik és az energia-megmaradás megnyilvánulása.

Összegezve, a Faraday-féle indukciótörvény tömör alakja:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahol

$$\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A}$$

a mágneses indukciófluxus.

Részletesebben kiírva:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B} d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.

A negatív előjel a Lenz-törvény miatt van ott. Ha nem lenne ott, akkor az indukció növelné az őt létrehozó hatást, így öngerjesztő folyamat indulna be, amely ellentmondana az energia-megmaradás törvényének.

Elektromos mezőt tehát nem csak (szabad és polarizált) töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező - épp ellenkezőleg - forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója

Korábban levezettük, egy hosszú vékony tekercsben a mágneses térerősség és a mágneses indukció közelítőleg:

$$H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu\frac{NI}{l}$$

Írjuk fel az egyetlen menet által körülfogott mágneses indukciófluxust (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A} = BA = \mu\frac{NA}{l}\mathrm{I}$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu \frac{N^2 A}{l} I$$

A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal: $\Phi = LI$. Az arányossági tényező definíció szerint L, az önindukciós együttható, ami szolenoidra a közelítés szerint:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

Az önindukciós együttható mértékegysége: $[\mathrm{L}] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\mathrm{henry} = 1\mathrm{H}$

Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

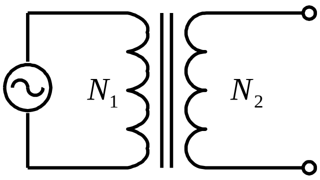
Tehát a tekercsben indukálódott feszültség arányos az áram változási gyorsaságával és az önindukciós együtthatóval. Utóbbiban benne van a menetszám négyzete (ezért van sok menete a tekercseknek) és a permeabilitás (ezért szoktak vasmagot tenni a tekercsekbe).

Mivel L arányos N^2-tel, sokmenetű tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az egész számolás során a lineáris anyagegyenletet használtuk, vagyis nemlineáris vasmagokra a kapott eredmény csak korlátozottan alkalmazható.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén

Tekintsünk két nyugalomban lévő tekercset egymás közelében. A primer tekercs menetszáma legyen N_1 , a szekunder tekercsé pedig N_2 . Ha a primer tekercsben folyó áram I_1, akkor az indukció:



A kölcsönös indukció szoros csatolás esetén

$$B_1 = \mu \frac{N_1 I_1(t)}{l},$$

a menetfluxusa pedig:

$$\Phi_1 = \mu \frac{N_1 A}{l} I_1(t)$$

A szoros csatolás azt jelenti, hogy a primer tekercs menetfluxusa egyben a szekunder tekercs menetfluxusa is (vagyis az indukcióvonalak közösek), így a szekunder tekercs teljes fluxusa:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_1 = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)$$

A kifejezésből kiolvasható, hogy a szekunder tekercs fluxusa arányos a primer árammal, az arányossági tényező M, a kölcsönös indukció együtthatója: $\Phi_{12} = MI_1$, ahol

$$M = L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

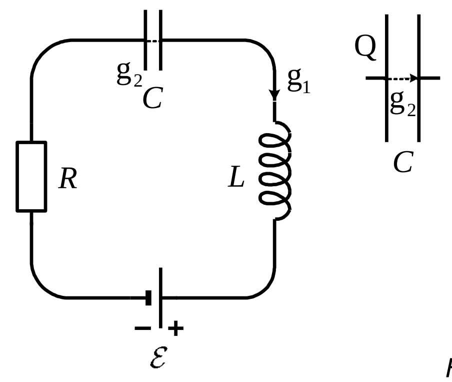
A szekunder tekercs kapcsain az indukált feszültség:

$$U_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

A jelenséget azért is nevezik kölcsönös indukciónak, mert visszafele is működik (a fenti okoskodás fordított szereposztásban is végigvihető), mi több, $L_{12}=M=L_{21}$.

Az általánosított huroktörvény

Tekintsük egy olyan hurkot, amely egy ellenállást, egy kondenzátort, egy tekercset, és egy áramforrást tartalmaz.
Legyen *R* a teljes kör ellenállása, *C* a kondenzátor kapacitása, *L* a tekercs (és egyben az egész hurok) önindukciós együtthatója, illetve $\mathcal{E}$ az alkalmazott elektromotoros erő.



Huroktörvény általánosítása

Írjuk fel a indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\left(\int_A \vec{B}d\vec{A}\right)}{dt}$$

Tegyük fel, hogy a tekercs önindukciós együtthatója egyben a kör indukciós együtthatója is (ez többnyire igen jó közelítés):

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -L\frac{dI}{dt}$$

Látható, hogy itt az E térerősség zárt görbe menti integrálja nem nulla, tehát ha a feszültséget a térerősség görbe menti integráljaként értelmezzük, akkor az nem lesz egyértelműen definiált mennyiség. Ezt a problémát egyelőre úgy oldjuk meg, hogy az $L\frac{dI}{dt}$ tagot egyfajta feszültségként kezeljük.

A *g* zárt görbét az ábrán látható módon bontsuk fel két részre, g_1 haladjon a vezetőben, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben. A g_2 görbén a térerősség integrálja nem más, mint a kondenzátoron eső feszültség, Q/C. Így ha a térerősségre vonatkozó összegzést a g_1, g_2, szakaszokra külön kiszámoljuk, akkor az alábbi egyenletet nyerhetjük:

$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

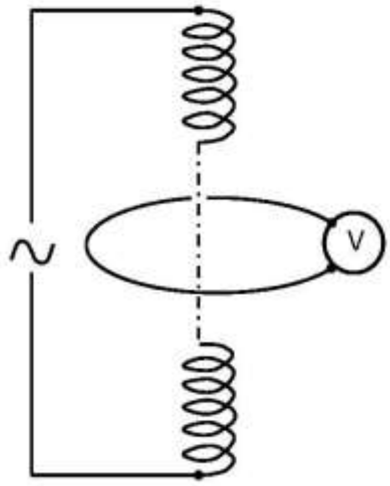
A Kirchhoff-hurokegyenlet általánosítása soros *RLC* körre:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tehát itt négy különböző típusú feszültségről van szó, amely közül kettő magyarázatra szorul. Az $\mathcal{E}$ itt egy áramforrás elektromotoros ereje. Ez vagy nem elektromágneses eredetű energiát alakít át elektromos energiává (pl. galvánelem vagy napelem), de az is lehet, hogy mágneses indukcióból származó energiát jelent, mint ahogy azt általában a hálózati áramforrás. Azonban ennél a tagnál nem a vizsgált áramkör mágneses fluxusának változásából származó indukált feszültséget vesszük tekintetbe, hanem távoli helyeken (pl. egy erőműben) zajló folyamatokat. Az indukciós tagot a következő pontban magyarázzuk meg.

Elektromágneses indukció és vektorpotenciál

Ahogy korábban kiszámoltuk, ha egy ideális szolenoidban váltóáram folyik, akkor a tekercs körül, de azon kívül haladó zárt hurokban feszültség és így áram indukálódik. Ezt az eredményt a kísérletek is megerősítik.



Elméleti szinten a probléma az, hogy a szolenoidon kívül a mágneses tér nulla. Ez azt is jelenti, hogy a $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ differenciális Maxwell-egyenlet nem írja le, mi történik a tekercsen kívül, ugyanis ott az egyenlet mindkét oldalára azonosan nulla adódik. Kérdés, hogy honnan tudja az elektron, hogy rá erő hat annak következtében, hogy tőle távol változik a mágneses tér? Az egyik lehetőség, hogy itt egyfajta „távolhatással" állunk szemben, ami meglehetősen rejtélyes lenne. Ezt a jelenséget Maxwell-Lodge effektusnak vagy néha paradoxonnak nevezik.

Általánosan egy vezetőben lévő töltésre kétféle erő hat, az elektromos térerősségből származó $q\vec{E}$ és a $q\vec{v}\times\vec{B}$ mágneses Lorentz erő. A körben indukált elektromotoros erőt ezek integrálja adja:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ind}} = \oint_g \left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{s}$$

ahol a vektorpotenciál bevezetésénél tanultak szerint

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ezt az előbbi összefüggésbe helyettesítve és figyelembe véve, hogy az első tag a korábban vett matematikai tétel miatt az integrálásnál kiesik, kapjuk:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ind}} = -\oint_g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{s} + \oint_g \vec{v}\times\vec{B} d\vec{s}$$

A kapott kifejezésben az első tag a nyugalmi, a második a mozgási indukciót írja le. Megjegyezzük, hogy az első tag visszaalakítható a szokásos fluxus-szabály alakba, ha a Stokes-tétel segítségével felületi integrállá alakítjuk:

$$\oint_g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{s} = \oint_f \mathrm{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{A} = \oint_f \frac{\partial \mathrm{rot}\vec{A}}{\partial t} d\vec{A} = \oint_f \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

A fentebb kapott, vektorpotenciált tartalmazó formának az az elméleti előnye, hogy a vezetőben keletkező indukált feszültséget a vezető helyén lévő hatásokra vezeti vissza, tehát nincs szükség távolhatásra, így feloldódik a paradoxon. Az érdekessége az, hogy a potenciálokat csak matematikai segéd-mennyiségként vezették be a XIX. században, de – részben az itt leírtak miatt – ma már valóságos fizikai mennyiségként tekintenek rájuk a fizikusok: nem a B mágneses indukció, hanem a vektorpotenciál változása a közvetlen oka a nyugalmi indukciónak.

Kondenzátor kisütése

Egy Q töltésre, azaz $U_0=Q_0/C$ feszültségre feltöltött kondenzátort R ellenálláson keresztül kisütünk. A huroktörvény:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0 \text{, ahol } \mathrm{I} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}$$

Idő szerint deriválva és átrendezve kapjuk a differenciálegyenletet az áramerősségre:

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = \frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{I}$$

ahol I_0 a kisütés kezdetekor beinduló áramerősséget jelenti. Ez az egyenlet is szétválasztható:

$$\int_{\mathrm{I}_0}^{\mathrm{I}} \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{I}} = \frac{-1}{\mathrm{RC}} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{dt}\,.$$

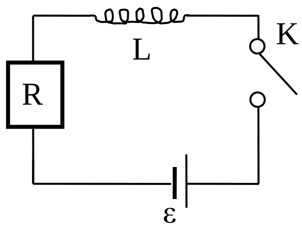
A megoldás: $\ln\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} = \frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}$. azaz

$$\mathrm{I(t)} = \mathrm{I}_0 \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}} = \mathrm{I}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}\ ,$$

ahol τ=RC az RC kör időállandója, $\mathrm{I}_0 = \mathrm{U}_0/\mathrm{R}$. Ez azt az időt adja meg, amely alatt *e*-adrészére csökken az áramerősség.

Tekercs rákapcsolása állandó feszültségre

Legyen a tekercs L induktivitása állandó, a kör ohmos ellenállása R, az áramforrás állandó elektromotoros ereje ε. A kapcsolót a t=0 időpillanatban zárjuk. Kérdés, hogyan változik az I áramerősség.



Ha hirtelen (Δt=0 idő alatt) nulláról I>0 értékre nőne, akkor dI/dt és ezzel az indukált feszültség végtelen nagy lenne, ami lehetetlen. Következésképp I(0)=0. A differenciálegyenlet:

$$IR - \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Egy szétválasztható típusú, integrálva:

$$\int_0^I \frac{dI}{\varepsilon - RI} = \frac{1}{L}\int_0^t dt$$

Az integrálást elvégezve:

$$\frac{1}{R}\ln\frac{\varepsilon - RI}{\varepsilon} = -\frac{1}{L}t$$

R-rel átszorozva, e-adra emelve kifejezhető az áramerősség:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Felhasználtuk, hogy t=∞-re I_∞= ε/R-nek adódik. Vezessük be a τ =L/R mennyiséget, amelyet időállandónak vagy a kör relaxációs idejének is neveznek. Ezzel az áramerősség:

$$I(t) = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Az áramerősség tehát exponenciálisan tart a maximális I_∞ értékhez. Ha a tekercset hirtelen lekapcsoljuk az állandó feszültségről, ennek a fordítottja játszódik le, az áram exponenciális függvény szerint tart a nullához: $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Erről úgy győződhetünk meg, ha a fenti levezetést $I(t=0)=I_0$ és ε=0 értékekre megismételjük.

Tranziens jelenségek

Az itt említett két eset fordítva is hasonlóan játszódik le. Levezethető, hogy ha egy tekercset hirtelen lekapcsolunk a feszültségről (a nyugalmi indukciónál tárgyalt módon), akkor az áramerősség exponenciálisan tart a nullához. Hasonlóan, ha egy kondenzátort hirtelen feszültségre kapcsolunk, fokozatosan töltődik fel. Mindezeket (az alább ismertetettektől eltérően) tranziens jelenségeknek nevezzük, mivel arról szólnak, hogy amikor a külső hatás (az áramforrás feszültsége) hirtelen megváltozik, először egy átmeneti (tranziens) állapban van a rendszer és ezen keresztül fejlődik a végleges állapot felé (amikor konstans az áram). Megjegyezzük, hogy ha ohmos ellenállás nélküli tekercsen keresztül zárunk rövidre egy feltöltött kondenzátort, akkor a harmonikus rezgés differenciálegyenletével analóg egyenletet kapunk, amelynek a megoldása szinuszos/koszinuszos rezgés, ez tehát szigorúan véve nem tranziens jelenség. Ha ebbe a körbe még ohmos ellenállást is iktatunk, azon hő fejlődik, az energia disszipálódik, ezért csillapított rezgést jön létre.

Áramjárta tekercs mágneses energiája. A mágneses tér energia-sűrűsége.

Tegyük fel, hogy egy egyenfeszültségű áramforrást kapcsolunk egy olyan tekercsre, amelyben eredetileg nem folyt áram. Ekkor az áram a tekercsben fokozatosan felnő a stacionárius értékére, viszont ehhez az áramforrásnak munkát kell végezni. Ennek az az oka, hogy az áram növekedése az áram irányával ellentétes elektromotoros erőt indukál. Az újabb és újabb töltéseket ez ellen az indukált feszültség ellen kell mozgatni. Egy dq töltés mozgatásakor végzett elemi munka:

$$dW = Udq$$

Az indukált feszültség nagyságát lineáris viselkedésű anyagok esetén a $U = L\frac{dI}{dt}$ képlettel számolhatjuk. Mivel az áramerősség definíció szerint $I = \frac{dQ}{dt}$, az elemi átáramlott töltést felírhatjuk az áramerősséggel: $dq = I \cdot dt$. Ezeket behelyettesítve:

$$dW = L\frac{dI}{dt}Idt = LIdI$$

A teljes folyamat során végzett munkát integrálással kapjuk:

$$W = \int_0^{I_\infty} LIdI = L\left[\frac{I^2}{2}\right]_0^{I_\infty} = \frac{LI_\infty^2}{2}$$

Ahol szintén felhasználtuk, hogy L nem függ I-től, vagyis a közeg lineáris. Eredményünk azt jelenti, hogy a tekercs pusztán azáltal, hogy áram folyik benne,

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

mágneses energiát tárol.

Vizsgáljunk most egy hosszú szolenoidot (amelynél a tekercsen kívüli szórt tér elhanyagolható. Toroidra ugyanez a levezetés házi feladat!) Helyettesítsük be a szolenoid önindukciós együtthatójára kapott $L = \mu\frac{N^2A}{\ell}$ kifejezést és vegyük figyelembe, hogy közelítésünk szerint $H = \frac{NI}{\ell}$ és $B = \mu\frac{NI}{\ell}$.

$$W_m = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2A}{\ell}I^2 = \frac{1}{2}\mu\frac{NI}{\ell}\frac{NI}{\ell}\ell A = \frac{1}{2}BHV,$$

ahol $V = A\ell$ a tekercs belsejének térfogata, ahol jó közelítéssel homogén a tér. Végeredményként azt kaptuk, hogy a mágneses tér energiasűrűsége:

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}}$$

Vissza a mágnesességhez

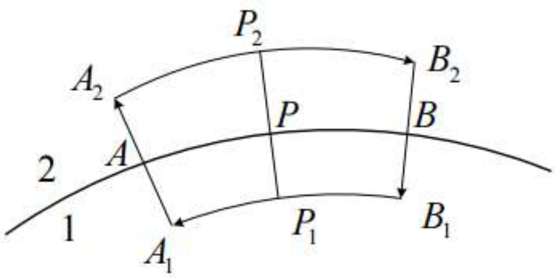
Mágneses térmennyiségek viselkedése két közeg határán

Határfeltételi egyenletek (peremfeltételek).

Tekintsük két különböző közeg határfelületét. Vegyünk fel a két közeg határfelületén egy irányított görbeívet (AB), illetve egy zárt görbét.

Alkalmazzuk a első Maxwell-egyenletet erre a görbére: $\oint_g \vec{H}\vec{ds} = \sum I + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}\vec{dA}$, azaz

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{H}\vec{ds} + \int_{A_2}^{B_2} \vec{H}\vec{ds} + \int_{B_2}^{B_1} \vec{H}\vec{ds} + \int_{B_1}^{A_1} \vec{H}\vec{ds} = \sum I + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}\vec{dA} = \int_F \vec{j}\,\vec{dA} + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}\,\vec{dA}$$



Közelítsük a P_1 és P_2 pontokat a P-hez, azaz húzzuk rá az $\widehat{A_1B_1}$ és $\widehat{A_2B_2}$ íveket az $\widehat{AB}$ ívre. Ekkor, $\int_{A_1}^{A_2} \vec{H}\vec{ds} \to 0$, és $\int_{B_2}^{B_1} \vec{H}\vec{ds} \to 0$,

mivel az integrálási tartományok 0-hoz tartanak. Az áramerősségek összegét a következőképpen is felírhatjuk:

$$\sum I = \int_F \vec{j}d\vec{A}$$

A hurok által közbezárt felülettel a nullához tart, a D deriváltja és a j áramsűrűség viszont véges, tehát a jobb oldal eltűnik. Utóbbi csak akkor igaz, ha nincsenek felületi áramok, ezt fel kell tennünk, hogy tovább léphessünk.
Mindebből az következik, hogy határértékben csak két integrál marad az egyenletünkből, és ezek az AB szakaszon vett integrálokhoz tartanak. Jelöljük H_1 és H_2 -vel a mágneses térerősséget a határ mentén, az 1-es és a 2-es közegben. Ezzel: $\int_{A_2}^{B_2} \overrightarrow{H_2 ds} \rightarrow \int_A^B \overrightarrow{H_2 ds}$,
A 1-es közegben az integrálás határait megcserélve előjelváltás történik:
$\int_{B_1}^{A_1} \overrightarrow{H ds} \rightarrow \int_B^A \overrightarrow{H_1 ds} = -\int_A^B \overrightarrow{H_1 ds}$, így a két integrált összevonva:

$$\int_A^B (\overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1})\overrightarrow{ds} = 0$$

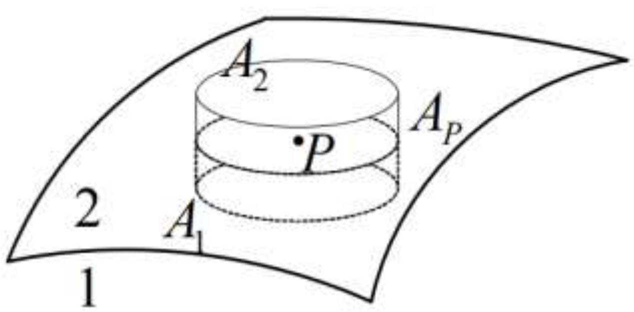
Ha most a B ponttal tartunk A-hoz, a mágneses térerősségek változása az AB görbe mentén elhanyagolhatóvá válik, vagyis az $H_2 - H_1$ –et kiemelhetjük az integrálás elé, majd a görbe hosszával egyszerűsíthetünk. A végeredmény:

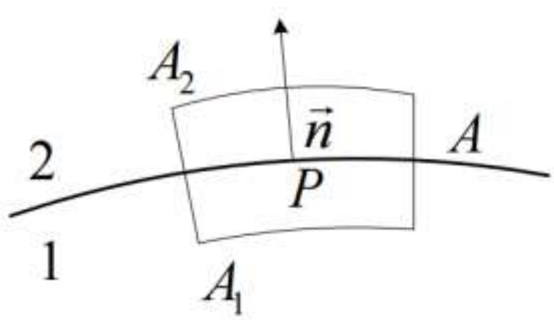
$$\overrightarrow{H_{t2}} = \overrightarrow{H_{t1}}$$

Az mágneses térerősség érintő irányú összetevője a közeghatáron folytonos (felületi áramok hiányában).
Ebből az is következik, hogy a B tangenciális komponense általában **nem** folytonos, hiszen pl. $H_{t1} = \frac{B_{1t}}{\mu_1}$, ezt behelyettesítve:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}}$$

A **normális** komponensek levezetéséhez vegyünk fel a két közeg határfelületén egy zárt felületet, és minden pontjában a felületi normálist. A keletkező palástfelületet határoljuk le A_2 -vel és A_1 -el a két közegben. A nyert zárt felületre alkalmazzuk a Gauss törvényt: $\oint_F \vec{B}\overrightarrow{dA} = 0$





$$\int_{A_1} \vec{B}\overrightarrow{dA} + \int_{A_p} \vec{B}\overrightarrow{dA} + \int_{A_2} \vec{B}\overrightarrow{dA} = 0$$

Közelítsük az A_1 és A_2 felületeket az A-ra, ekkor a palástfelület nullához tart, így a hozzá tartozó integrál a 0-hoz tart:

$$\int_{Ap} \vec{B}\overrightarrow{dA} \to 0$$

Ugyanakkor pedig, $\int_{A_1} \vec{B}\overrightarrow{dA} \to \int_A \overrightarrow{B_1}\,\overrightarrow{dA}$ ahol $\overrightarrow{B_1}$ az indukció a határon, de még az 1-es közegben, és $\int_{A_2} \vec{B}\overrightarrow{dA} \to \int_A \overrightarrow{B_2}\,\overrightarrow{dA}$, ahol $\overrightarrow{B_2}$ az indukció a határon, de még az 2-es közegben.

$$\int_A B_{n1} dA + \int_A B_{n2}\, dA = 0$$

Mivel a felületi normálisok ellentétesek:

$$\int_A (B_{n2} - B_{n1})\, dA = 0$$

Ez az összefüggés bármely *A*-ra igaz, tehát:

$$B_{n\,2} = B_{n1}$$

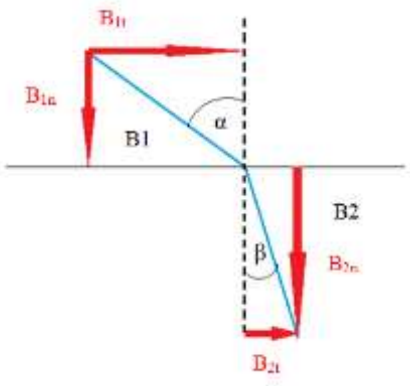
A végeredmény: **a mágneses indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen folytonos**.

Mivel $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$, vagyis lineáris közegben

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Mágneses térerősség- és indukcióvonalak törési törvénye:

A mágneses térerősséget vizsgálva, felhasználva, hogy $H_{t2} = H_{t1}$:



$$\frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta} = \frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta} = \frac{\frac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\frac{B_{2t}}{B_{2n}}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

A mágneses térmennyiségek forrásai és örvényei

A mágneses térerősség **örvényeit** a makroszkopikus áramok keltik: $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$.

A mágnesezettség örvényeit a „molekuláris áramok" keltik: $\mathrm{rot}\vec{M} = \vec{j}_m$.

A két egyenletet összeadva és μ_0 -lal szorozva: $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \mathrm{rot}(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}_m\right)$.

Tehát a B mágneses indukció örvényeit mindkét áram kelti (egy μ_0 tényezőtől eltekintve)

De:

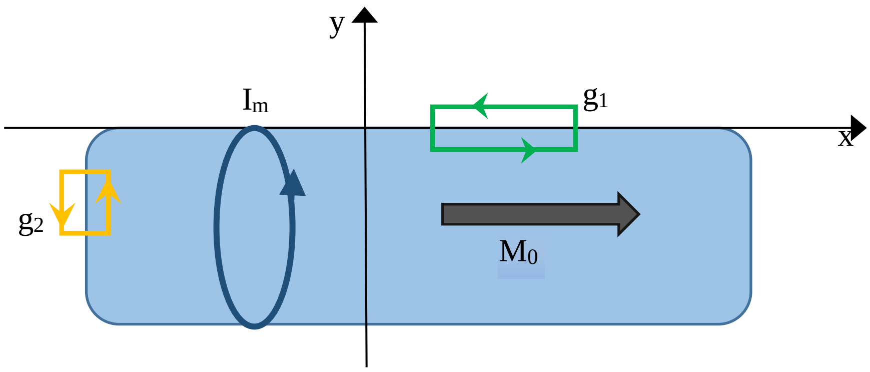
A mágnesezettség **forrásai** (nyelői) a déli (északi) mágneses pólusok: $\mathrm{div}\vec{M} = -\rho_m$, ahol ρ_m az ún. effektív mágneses töltéssűrűség, ami az északi pólusnál pozitív, a délinél negatív.

A mágneses indukció forrásmentes: $\mathrm{div}\vec{B}=0$, vagyis $\mathrm{div}\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=0 \quad \Rightarrow \mathrm{div}\vec{H}=-\mathrm{div}\vec{M}=\rho_m$,

tehát mágneses tér forrásai szintén a mágneses pólusok, csak ellentétes előjellel: $\mathrm{div}\vec{H}=\rho_m$.

Ebből viszont arra tudunk következtetni, hogy egy állandó mágnes két pólusa között a H és az M vonalai egymással **ellentétes** irányba futnak, ami legalábbis meghökkentő kéne, hogy legyen azok számára, akik először szembesülnek ezzel a ténnyel.

Példa: Az ábrán egy (kék színnel jelölt) állandó mágnest látunk, melynek mágnesezettsége egyenletes és x irányú. A molekuláris áramok eredőjét sötétkék nyíllal szemléltettük. A mágnes felső lapja az x-z sík. Ekkor ezen a határfelületen a molekuláris áramok eredője z irányú (a lap síkjából kifelé mutat). Számoljuk ki itt a mágnesezettség rotációját. Ez várhatóan nem lesz nulla, hiszen a zölddel jelölt g_1 zárt görbén végigintegrálva M-et csak az anyag belsejében futó szakaszon kapunk nullától különböző értéket, így Stokes tételéből már látszik, hogy a rotáció nem nulla.



A pontos számolás azért problémás, mert M nem folytonos függvény, ugrása van a határfelületen, így ott nem is differenciálható. Ezt úgy kerüljük meg, hogy feltesszük, hogy a határfelülettől lefelé az anyag belsejében M konstans, de fölötte y irányban M véges gyorsasággal, pl. exponenciális függvény szerint tart a nullához. Ez a következő mágnesezettség-függvényt jelenti:

$$\vec{M}=\begin{pmatrix} M_0 e^{-ay} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol *a* egy igen nagy értékű állandó. Számoljuk ki M rotációját!

$$\mathrm{rot}\vec{M}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M_0 e^{-ay} & 0 & 0 \end{pmatrix}=aM_0 e^{-ay}\vec{k}$$

Várakozásainknak megfelelően azt kaptuk, hogy a $\mathrm{rot}\vec{M}$ és ezzel $\vec{j}_m$ z irányú és az anyag határán (ahol y=0) egyáltalán nem elhanyagolható (hiszen *a* nagy, viszont $e^{-ay}=1$), az anyagtól távol ellenben igen (hiszen ae^{-ay} gyorsan tart a nullához, ha *y* nő).

A szóban forgó állandó mágnes pólusai a jobb és bal lapjánál vannak. Ennek megfelelően a bal oldalon M-nek forrása, a jobb oldalon pedig nyelője van. Itt a molekuláris áramok kiejtik egymást, így M nem örvényes, ami onnan is látható, hogy a narancssárga g_2 körvonal menti integrálás nullát ad. [4]

[4] Gyakorlásként érdemes végigszámolni mindkét esetet egymástól függetlenül: bebizonyítani, hogy nulla a görbe menti integrál és rotáció-számítással azt, hogy nulla a rotáció is.

Lemágnesező tér

Ha egy mágnesezhető (paramágnes vagy lágy ferromágnes) anyagot külső $\vec{H}_a$ (*a* mint 'applied') mágneses térbe teszünk, akkor (ez elektromos depolarizációval analóg módon) a mágneses tér az anyag belsejében kevesebb (pl. $\vec{H}_{\mathrm{in}}$) lesz, mint eredetileg a vákuumban volt. Mivel a mágneses tér additív, a szóban forgó esetben H úgy adható meg az anyagban, hogy összeadjuk az eredeti (külső) mágneses teret az anyag saját mágneses terével. Ez utóbbit $\vec{H}_{\mathrm{d}}$ -vel jelöljük és lemágnesező térnek vagy demagnetizációs térnek (demagnetization field, innen jön a d betű) nevezzük.

$$\vec{H}_{\mathrm{in}} = \vec{H}_a + \vec{H}_{\mathrm{d}}$$

Végül is $\vec{H}_a$ külső tér átmágnesezi az anyagot, ennek hatására ennek egy nullától különböző mágnesezettsége lesz, amely iránya izotróp esetben megegyezik a külső tér irányával:

$$\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{H}_a .$$

A $\vec{H}_{\mathrm{d}}$ lemágnesező tér pedig a mágnesezettség (pontosabban a mágneses pólusok) miatt jön létre. Ahogy fentebb (amikor a mágneses tér forrásosságról beszéltünk) utaltunk rá, a lemágnesező tér iránya **ellentétes** a mágnesezettségével. Az esetek többségében a mágnesezettség és a lemágnesező tér az anyagban nem homogén, ezért kvantitatíve igen nehéz vizsgálni. Kimutatható azonban, hogy ellipszoid alakú testeknél, ha az ellipszoid bármelyik főtengelye egybeesik a külső tér irányával, akkor a testen belül mindegyik vektormező homogén lesz és a lemágnesező tér arányos a mágnesezettséggel:

$$\boxed{\vec{H}_{\mathrm{d}} = -N\vec{M}}$$

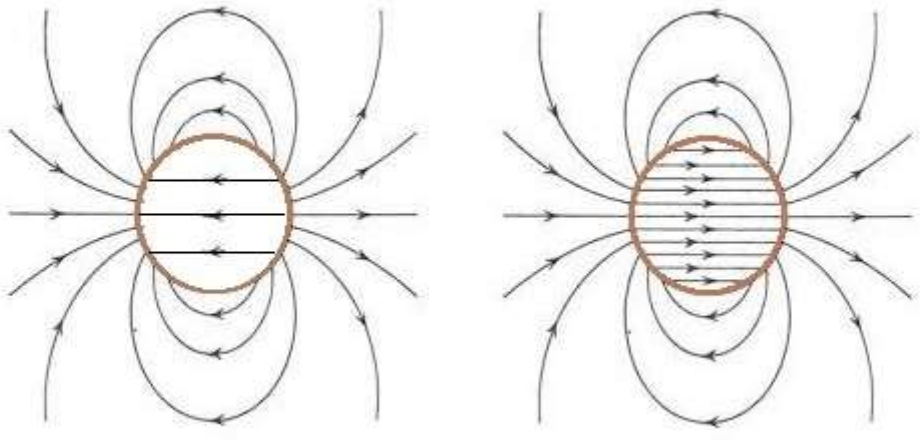
Az $N \geq 0$ arányossági tényezőt **lemágnesezési tényező**nek hívják és csak az ellipszoid alakjától függ. Pontosabban, bármely ellipszoidra a három főtengelyre kimérve a három N_x, N_y és N_z együtthatót, az összegük éppen 1.

$$N_{\mathrm{x}} + N_{\mathrm{y}} + N_{\mathrm{z}} = 1$$

Ebből a szimmetria miatt rögtön következik, hogy gömbre N=1/3, vagyis $\vec{H}_{\mathrm{d}} = -\vec{M}/3$. Ekkor egy gömb alakú állandó mágnes belsejében külső tér nélkül (tehát a H_a=0 esetben) a mágneses indukcióra ismert képletből kapjuk, hogy

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}_{\mathrm{d}} + \vec{M} = \frac{2}{3}\vec{M}$$

Az ábrán egy gömb alakú állandó mágnes H és B/μ_0 tere látható. (Azért osztottunk a μ_0 konstanssal, hogy a vákuumban, azaz a mágnesen kívül a két tér megegyezzen.)



Az anyag belsejében a lemágnesező tér uralkodik, így a H vonalak a B/μ_0-lal (és az M-mel) ellentétes irányúak és kétszer ritkábbak.

Amikor egy paramágneses vagy lágy ferromágneses anyagot felmágnesezünk, akkor a végeredménynél a külső teret kell összeadni a mágnes terével, ami az anyagon belül ellentétes az alkalmazott térrel. Így már érthető, hogy miért kisebb az anyagon belül H, mint a vákuumban volt.

A lemágnesezési tényező értéke határesetekben:

Egy olyan ellipszoidra, amelyet x irányban nyújtunk, N_x csökken, határértékben nullához tart. Nagyon hosszú hengeres alakú, és nagyon lapos mágnesekre határértékben egyszerű számokat kapunk:

1. tű alakú mágnes: $\frac{\ell_x}{\ell_y} = \frac{\ell_x}{\ell_z} \to \infty \;\Rightarrow\; N_x \to 0,\, N_y = N_z \to \frac{1}{2}$,

2. lapos korong alak: $\frac{\ell_x}{\ell_y} = \frac{\ell_x}{\ell_z} \to 0 \;\Rightarrow\; N_x \to 1,\, N_y = N_z \to 0$.

Hogy ezt belássuk, tekintsük először a fenti ábrán látható gömböt. A gömb oldalánál a B merőleges a közeghatárra, tehát a határfeltételi egyenletek miatt folytonosan megy át. A gömb alján és tetején a H párhuzamos a közeghatárral, tehát szintén folytonosan megy át. Kezdjük el most a gömböt x irányban (az ábrán vízszintesen) nyújtani, miközben a térfogatot és a mágnesezettséget állandó értéken tartjuk. Ekkor a B vonalak számára az egyre hosszúkásabb ellipszoidon kívül, annak oldalánál egyre nagyobb hely keletkezik, azok egyre ritkábbak lesznek. Ebből az következik, hogy a H vonalak is ritkábbak lesznek az ellipszoid oldala (az ábrán az alja és a teteje) mellett, de így a folytonosság miatt belül is, ami azt jelenti, hogy H azaz N_x csökken. Ha nem tenné, akkor az a végtelenbe tartó hosszúságú ellipszoid oldala mentén óriási térfogatban lenne nagy a H és ezzel a B, vagyis divergálna a mágneses tér energiája. Tehát az $N_x \to 0$ állítás az energiaminimum elvéből is megmagyarázható. A hosszúkás ellipszoid hegyénél ugyan nagy a B és a H, de ezek kis térfogatot jelentenek az oldalához képest, tehát ez utóbbi térfogatra kell minimalizálni a tér energiáját.
Ha most épp ellenkezőleg, lapítani kezdjük a gömböt, a kapott korong egyre nagyobbá váló alap- és fedőlapjánál kell minimalizálni a mágneses tér energiáját, de azokra a felületekre a B folytonossága teljesül, vagyis a B-nek kell csökkennie. De $B = \mu_0(M - H)$ akkor lesz minimális, ha M=H, vagyis ha N_x=1.

Alakanizotrópia, a hiszterézisgörbe korrekciója

Tegyük fel most, hogy egy vasból készült, nagyon hosszú tűt akarunk felmágnesezni, amelyre hosszanti irányban $N_x \approx 0$, keresztben $N_y = N_z \approx 1/2$. A fentiek alapján:

$$\vec{H}_a = \vec{H}_{in} - \vec{H}_d = \vec{H}_{in} + N\vec{M}$$

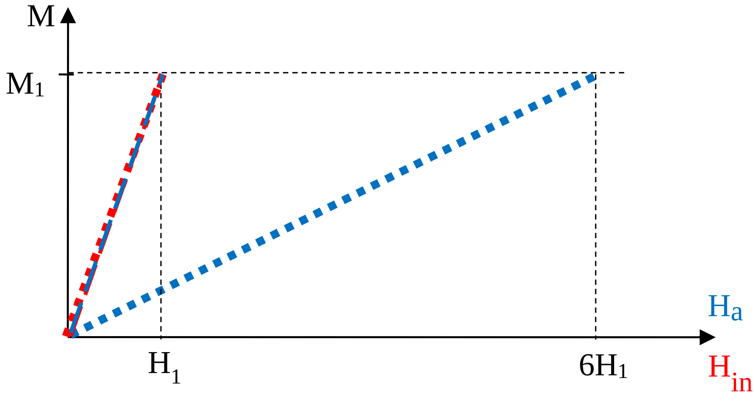
Az egyszerűség kedvéért használjuk a lineáris közelítést a mágnesezettségre: $\vec{M} = \chi \vec{H}_{in}$. Ekkor

$$\vec{H}_a = \vec{H}_{in} + N\chi\vec{H}_{in} = (1 + N\chi)\vec{H}_{in}$$

- Hossztengely mentén történő mágnesezésénél N=0, tehát az anyagon belüli tényleges tér megegyezik az alkalmazott mágnesező térrel: $\vec{H}_{in} = \vec{H}_a$. Ezt szaggatott vonalakkal ábrázoltuk az alábbi ábrán, azonban a piros és kék szaggatott vonal egybeesik: az M_1 mágnesezettség eléréséhez H_1 értékű teret kell alkalmaznunk, ami az anyagban lévő tényleges térrel megegyezik.
- Keresztben történő mágnesezés: Válasszunk egy szerény χ=10 értékű szuszceptibilitást. Felhasználva, hogy N=1/2, kapjuk, hogy

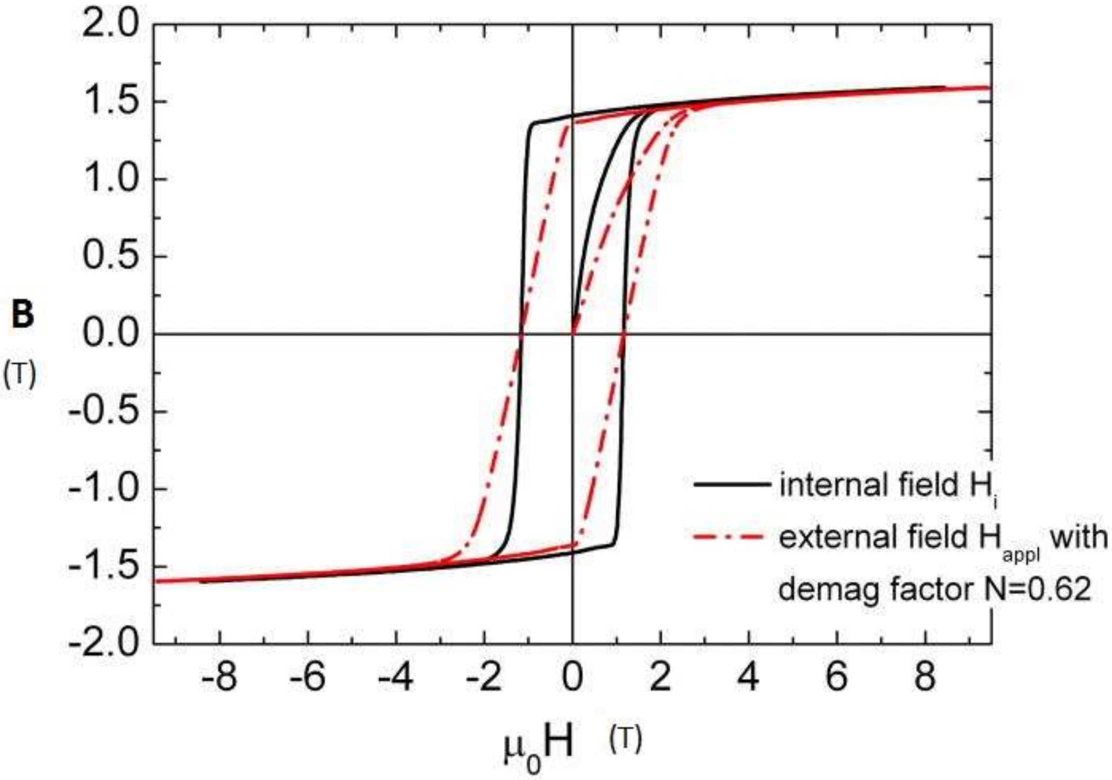
$$\vec{H}_a = (1 + 10/2)\vec{H}_{in} = 6\vec{H}_{in}$$

A végeredmény: keresztben hatszor nagyobb térrel lehet ugyanolyan mértékben felmágnesezni a mágnestűt, mint hosszában, ami azt is jelenti, hogy a keresztben mért szuszceptibilitás hatoda a valódinak. Az ábrán ezt az esetet pontozott vonalakkal szemléltetjük. A kék pontozott vonal jelzi, hogy az M_1 mágnesezettség eléréséhez $6H_1$ értékű teret kell alkalmaznunk, a piros pontozott vonal (amely a szaggatott vonalakkal esik egybe) pedig azt, hogy az anyagban lévő valódi mágneses tér továbbra is csak H_1.



Nagyobb szuszceptibilitás esetén az eltérés még nagyobb.

Eddig az anyag felmágnesezéséről, azaz a szűzgörbéről beszéltünk. Természetesen nem csak a szűzgörbét, hanem az egész hiszterézisgörbét ábrázolhatjuk kétféle vízszintes tengellyel. Az első verziónál (piros szaggatott görbe alul) a független változó a H_a alkalmazott tér, amit mérni tudunk és ennek függvénye az M (illetve a B). A második esetben (fekete folytonos görbe) az anyagban lévő valódi H_{in} tér függvényében ábrázoljuk M-et.



Amennyiben $N \neq 0$, a két görbe nem egyezik meg, kivéve az M=0 pontokat. A második görbét az elsőből számítással kapjuk, melynek során figyelembe vesszük a lemágnesező hatásokat. Ezt az eljárást a **hiszterézisgörbe korrekciójának** nevezzük. Amikor a szakirodalomban egy anyagra megadnak egy hiszterézisgörbét, akkor az általában már a korrigált görbe, amely az anyag tulajdonságait tükrözi, nem pedig a minta alakját.

Mágneses skalárpotenciál és mágneses körök

Amennyiben nincsenek jelen elektromos áramok és változó elektromos tér, $\mathrm{rot}\vec{H} \equiv 0$ az egész térben. Ekkor a korábbi 1-es tétel szerint létezik U_m mágneses skalárpotenciál, hogy

$$\vec{H} = -\mathrm{grad}U_{\mathrm{m}}$$

Ezt a skalárpotenciált úgy állíthatjuk elő, hogy kijelölünk egy 0 pontot, amelyben $U_m=0$, és ekkor bármely A pontban

$$U_{\mathrm{m}}(A) = \int_A^0 \vec{H}d\vec{s}$$

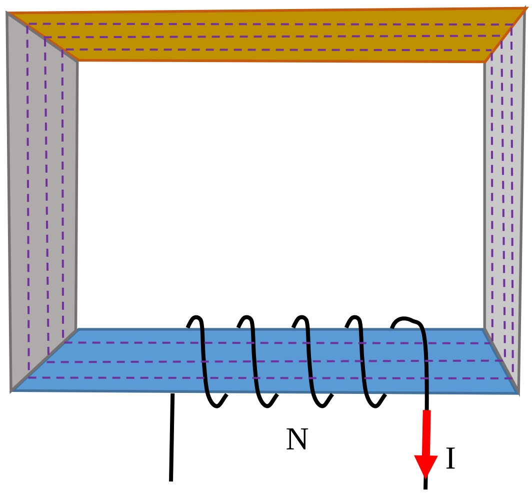
Felírhatjuk a Kirchhoff-féle huroktörvény analógiájára:

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = \sum U_{\mathrm{m}} = 0$$

A mágneses skalárpotenciált ciklikus potenciálnak vagy **mágneses feszültség**nek is hívják. Ezt a mennyiséget az elektromos feszültségnél jóval ritkábban használják. Ennek egyik oka, hogy nincs olyan szemléletes fizikai jelentése, mint annak, tehát nem egyezik meg semmilyen munkával.

Amennyiben a térben áramok vannak jelent, a H már nem minden pontban lesz örvénymentes, a mágneses feszültség már nem minden zárt hurokra lesz nulla. Viszont az elektromos esethez hasonlóan az áramokból adódó járulékokat elnevezhetjük „idegen” feszültségnek, mágneses gerjesztésnek vagy **magnetomotoros erőnek**.

Az ábrán látható körben például négy lágymágneses anyagú test van egymáshoz erősítve, így a mágneses fluxus jó közelítéssel teljes egészében bennük halad. Ezért úgy tekinthetjük, hogy ők sorosan vannak egymáshoz kapcsolva. Az áramok szerepét játszó fluxusok az egyes testekben egyenlők (ugyanazon indukcióvonalak haladnak végig minden keresztmetszeten), a mágneses feszültségek pedig összeadódnak.



Az Amper-féle gerjesztési törvényt felírhatjuk olyan alakban is, hogy $\sum U_{\mathrm{m}} = NI = \varepsilon_{\mathrm{m}}$. Egy homogén testben $U_{\mathrm{m}} = H\ell$, $\Phi = BA$, a kettő hányadosa R_m az ún. **mágneses ellenállás**:

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{\Phi} = \frac{H\ell}{BA} = \frac{H\ell}{\mu HA} = \frac{\ell}{\mu A} = R_{\mathrm{m}} \cdot$$

Az egyes testekre tehát az Ohm-törvény analógiájára érvényes a **mágneses Ohm-törvény**:

$$U_{\mathrm{m,i}} = R_{\mathrm{m,i}} \cdot \Phi \ ,$$

Ha a vastestek párhuzamosan lennének egy „mágneses áramforrásra” kapcsolva, akkor a mágneses feszültségük egyenlő lenne, az áramforrásból kijövő főfluxus viszont megoszlana köztük. Tehát a mágneses eredő ellenállásra soros és párhuzamos kapcsolás esetén hasonló állítások vezethetők le, mint az elektromos áramkörök esetén: **soros** kapcsolásnál **a mágneses ellenállások összegződnek**:

$$R_{\text{m,eredő}} = \sum_n R_{\text{m,n}} \ ,$$

párhuzamos kapcsolásnál (elágazó mágneses körökre) pedig ezek reciprokai:

$$\frac{1}{R_{\text{m,eredő}}} = \sum_n \frac{1}{R_{\text{m,n}}}$$

Mivel a levegő permeabilitása több nagyságrenddel kisebb, mint a vasé, nyilvánvaló, hogy még egy keskeny **légrés** is nagymértékben növeli a kör mágneses ellenállását, tehát sokkal nagyobb gerjesztés szükséges egy adott mágneses áram (azaz fluxus) létrehozásához, mint zárt vasmag esetén. A légrés kialakításával ugyanis mágneses pólusok jelennek meg, ezek pedig az eredeti (az áram által gerjesztett) mágnesező térrel ellentétes irányú lemágnesező tér forrásai.

Elektromágneses hullámok

A homogén hullámegyenlet levezetése

A Maxwell egyenletekből levezethető az elektromágneses hullámok létezése és főbb tulajdonságaik. Vizsgáljuk a legegyszerűbb esetet és tegyük fel, hogy vákuumban vagy homogén, izotróp és lineáris szigetelőben vagyunk. Ez azt jelenti, hogy j ≡ 0 és ρ=0, valamint $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ és $\vec{B} = \mu\,\vec{H}$. Ekkor az első két Maxwell egyenlet differenciális alakja:

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Vegyük az első egyenlet rotációját

$$rot\,rot\,\vec{H} = rot\,\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Tudjuk, hogy minden vektormezőre teljesül a következő matematikai azonosság:

$$rot\,rot\,\vec{v} = grad\,div\,\vec{v} - \Delta\,\vec{v}\ ,$$

ahol $\Delta\,\vec{v} = \begin{pmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\\ \Delta v_z\end{pmatrix}$. Ezt, valamint a független változók szerinti deriválások felcserélhetőségét felhasználva

$$grad\,div\,\vec{H} - \Delta\,\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\,rot\,\vec{D}$$

Tudjuk, hogy

$$div\,\vec{B} = 0 \longrightarrow \mu\,div\,\vec{H} = 0$$

ezeket és a feltevéseinket felhasználva

$$-\Delta\,\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\,rot\,\varepsilon\,\vec{E} = \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\,rot\,\vec{E} = \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

vagyis megkaptuk a homogén hullámegyenletet a mágneses térre:

$$\Delta\,\vec{H} = \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Descartes-koordináta rendszerben a komponensekre kiírva:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon\,\mu\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon\,\mu\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}=\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Ezek másodrendű hiperbolikus parciális differenciálegyenletek. A homogén szó itt most a differenciálegyenlet matematikai értelemben vett homogenitását jelöli, vagyis hogy a változóktól nem függő tag nem szerepel az egyenletben. Fizikailag ez annak felel meg, hogy a vizsgált térrészben nincsenek töltések és áramok, vagyis a hullámoknak nincs forrásaik, nem itt keletkeznek, csak áthaladnak. Ez nem keverendő össze a szigetelő anyag homogenitásával, ami azt jelenti, hogy az anyagi jellemzők nem függnek a helytől (ezt itt most szintén feltételeztük).

A fentiekhez hasonlóan, csak épp a második Maxwell-egyenletből kiindulva levezethető a hullámegyenlet elektromos térre is:

$$\Delta\,\vec{E}=\;\varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Például az *x* komponensre:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Ennek levezetése házi feladat.

Síkhullám megoldás

Egy parciális differenciálegyenletnek általában sok megoldása van. Deriválással bizonyítható, hogy a mechanikából jól ismert síkhullámok is megoldásokat adnak. Egy pozitív x tengely irányába haladó hullámban a térerősségeket a

$$E=E_0\sin\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]\qquad\text{és}\qquad H=H_0\sin\left[2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

képletek írják le, ahol λ és f a hullám frekvenciája és hullámhossza. A megoldás visszahelyettesítése a hullámegyenletbe a $\frac{1}{\lambda^2 f^2}=\varepsilon\mu$ összefüggésre vezet. Mivel a hullám *c* terjedési sebessége a frekvencia és hullámhossz szorzata ($c=f\lambda$), az a közeg abszolút permittivitásával és permeabilitásával kifejezhető:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,.$$

A vákuumbeli terjedési sebesség (azaz a vákuumbeli fénysebesség) $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ egy univerzális állandó, amely jól ismert univerzális állandókból ($\varepsilon_0\approx\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\frac{C^2}{Nm^2},\quad \mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}$) kiszámítható. A számítás eredménye (amit a kísérletek is megerősítenek) a jól ismert $c\approx 3\cdot 10^8 m/s$ érték.
Közegben a hullám terjedési sebessége függ annak elektromos és mágneses tulajdonságaitól:
$\frac{c_{vákuum}}{c_{közeg}}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$. Tehát minél nagyobb a közeg relatív permittivitása és permeabilitása, annál kisebb ott a fény sebessége.

Megjegyezzük, hogy az elektromágneses hullámokat leíró képleteket átírhatjuk az $E=E_0\sin\ \omega t-kx$, $H=H_0\sin\ \omega t-kx$ formába is, ahol ω(=2πf) a körfrekvencia, k(=2π/λ) pedig a hullámszám. Ezek az összefüggések általános esetben (tetszőleges irányú hullám esetén) $E=E_0\sin\ \omega t-\vec{k}\vec{r}$ és $H=H_0\sin\ \omega t-\vec{k}\vec{r}$ alakúak, ahol a $\vec{k}$ hullámszám vektor hossza k és a hullám terjedése irányába mutat. Ezeket a hullámokat szokás síkhullámoknak is nevezni, mivel az azonos fázisú pontok mértani helyei síkok.

Az elektromágneses hullámok **transzverzálisak**. A transzverzalitás azt jelenti, hogy a hullámban terjedő vektormennyiség merőleges a terjedés irányára. Az elektromágneses hullámok esetében ezek a vektormennyiségek az elektromos és a mágneses térerősség-vektorok. Ezek a vektorok ráadásul **egymásra is merőlegesek**, ami többet jelent, mint a transzverzalitást. Tehát végeredményben az elektromágneses sugárzásban az elektromos és a mágneses térerősség-vektorok egymásra is és a terjedés irányára is merőlegesek. Ezt szemléltetendő vegyünk fel egy olyan koordináta rendszert, hogy $\vec{E}$ az *x* tengely, míg $\vec{H}$ az *y* tengely irányába mutasson (egy fél periódusideig a pozitív, aztán a negatív irányba), a terjedés iránya pedig a *z* tengely legyen. A sugárzás a térben hullám formájában terjed ugyanazzal a *c* fénysebességgel, energiát (és persze tömeget és impulzust) szállítva. Mivel *c* minden elektromágneses hullámra ugyanaz, a $c=f\lambda$ képletből látható, hogy a frekvencia és a hullámhossz fordítottan arányosak. Megjegyezzük, hogy egyes kísérletekben a fény részecskeként viselkedik, a részecske (kvantum) neve **foton**. (Erről a klasszikus elektrodinamika nem tud számot adni, így ebben a tárgyban nem tárgyaljuk).

Retardált potenciálok

Említettük, hogy a $\Delta U = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ és $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$ Poisson-egyenletetek megoldásai legegyszerűbb alakban így írhatók fel:

$$U(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\infty} \frac{\rho(r)}{r} dV \quad \text{és} \quad \vec{A}(0) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\infty} \frac{\vec{j}(r)}{r} dV \ ,$$

Ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ az origótól való távolság és az integrálás a teljes térre megy.

Kérdés: Ha egy adott időpillanatban az origótól nagyon távol (pl. több fényévre) megváltozik egy adott töltés vagy áramelem helyzete, honnan fogja rögtön „megtudni” ezt az origóban a potenciál? A képletben ugyanis nincs szó időről, ami miatt úgy kell értelmezni, hogy a potenciál egy adott *t* időpillanatban az egész tér összes töltésének/áramának *ugyanabban* a *t* időpillanatban vett értékétől függ.

Ennek orvoslására adunk egy precízebb megoldást *U*-ra és $\vec{A}$-ra:

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV$$

ahol $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ a terjedési sebesség a közegben. Ezek a **retardált** potenciálok.

Jelentésük, hogy a potenciált az *x, y, z* pontban *t* időpillanatban az integrálban szereplő áram és töltéssűrűségek korábbi, $t - \frac{r}{c}$ időbeli értékei szabják meg, ugyanis *t=r/c* idő szükséges ahhoz, hogy a hatás *c* sebességgel odaérjen *r* távolságból. Ez kifejezi a térmennyiségek véges terjedési sebességét.

Egy másik lehetséges megoldás:

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho\left(\vec{r}, t + \frac{r}{c}\right)}{r} dV \quad \text{és} \quad \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t + \frac{r}{c}\right)}{r} dV$$

az avanzsált potenciálok. Ezeknek nincs szemléletes fizikai tartalmuk, de matematikailag ezek is korrektek.

Energiatétel elektromágneses térben

Ahol a térjellemzők zérustól különböző értékűek, ott energia van a térben. A villamos és mágneses tér hullámszerű terjedése energia-szállítással kell járjon. Hogy az elektromágneses térre vonatkozó energiamérlegegyenletet megkapjuk, induljunk ki az első két Maxwell egyenletből és szorozzuk meg őket skalárisan $\vec{E}$ –vel, ill. $\vec{H}$-val.

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad /*\,(-\vec{E})$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad /*\,(\vec{H})$$

Ekkor

$$\vec{E}\; rot\; \vec{H} = +\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E}\vec{j}$$

$$\vec{H}\; rot\; \vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A felső egyenletet az alsóból kivonva

$$\vec{H}\; rot\; \vec{E} - \vec{E}\; rot\; \vec{H} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E}\vec{j}$$

Használjuk az alábbi azonosságot:

$$\vec{a}\; rot\; \vec{b} - \vec{b}\; rot\; \vec{a} = div(\vec{b}x\vec{a})$$

Így

$$div(\vec{E}x\vec{H}) = \vec{H}rot\; \vec{E} - \vec{E}\; rot\; \vec{H}$$

$$div(\vec{E}x\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\mu H^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2\right) - \vec{E}\vec{j}$$

Bevezetve $(\vec{E}x\vec{H}) = \vec{S}$ jelölést, ahol $\vec{S}$ az úgynevezett **Poynting vektor** (energia áramsűrűség vektor), az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladó energiát adja meg. A jobb oldal első tagjában $\frac{1}{2}\,\varepsilon E^2$ és $\frac{1}{2}\,\mu H^2$ az elektromos és a mágneses tér energiasűrűsége.

$$div\vec{S} + \frac{\partial w_{EM}}{\partial t} = -\vec{E}\vec{j}$$

A Poynting vektor alkalmas az elektromágneses energia hullámszerű tovaterjedésének leírására. Az egyenlet jobb oldalán a Joule féle veszteség differenciális kifejezése áll. Ha a térben vezetők is vannak és egy zárt térfogatba elektromágneses energia lép be, az időben energiasűrűség növekedést eredményez és térfogaton belüli hőfejlődést is.

Ha ideális szigetelőben terjednek hullámok, azaz $\vec{j}$ =0, egy kontinuitási egyenletet kapunk az energiára

$$div\vec{S} + \frac{\partial w_{EM}}{\partial t} = 0$$

amely azt fejezi ki, hogy zárt térbe beáramlott energia a tér energiasűrűségét növeli.

Zárt felület által határolt térfogatra integrálva a bal oldalon az elektromágneses tér összes, a térfogatban található energiája jelenik meg:

$$-\frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = \int_v (\vec{E}\vec{j})\,dV + \oint_f \vec{S}\,d\vec{A}$$

az utolsó tag adja a zárt felületből kiáramló energiát. Az áramsűrűséges tag megértéséhez további átalakításokat kell végeznünk. A $\vec{j}$ áramsűrűséghez két, minőségileg különböző tag adhat járulékot, a $\vec{j}_\mathrm{v}$ vezetési (konduktív) áramsűrűség és a $\rho\vec{v}$ konvektív áram, amely pl. ionok mozgását jelenti. Az előbbit a differenciális Ohm-törvény alapján a következőképp írhatjuk fel:

$$\vec{j}_\mathrm{v} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}_\mathrm{i}\right)$$

ahol $\vec{E}_\mathrm{i}$ az idegen, nem elektromágneses (hanem pl. kémiai) eredetű térerősség. Ebből kifejezve az $\vec{E}$ elektromos térerősséget:

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_\mathrm{v}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} - \vec{E}_\mathrm{i}$$

Ezzel:

$$\vec{E}\vec{j} = \vec{E}\vec{j}_\mathrm{v} + \rho\vec{E}\vec{v} = \vec{j}_\mathrm{v}\left(\frac{\vec{j}_\mathrm{v}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} - \vec{E}_\mathrm{i}\right) + \rho\vec{E}\vec{v}$$

Az ismert $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -\vec{b}\left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$ matematikai azonosságot felhasználva a középső tagot átalakíthatjuk:

$$\vec{j}_\mathrm{v}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = -\vec{v}\left(\vec{j}_\mathrm{v} \times \vec{B}\right)$$

Vagyis:

$$\vec{E}\vec{j} = \frac{j_\mathrm{v}^2}{\sigma} + \vec{v}\left(\vec{j}_\mathrm{v} \times \vec{B}\right) - \vec{j}_\mathrm{v}\vec{E}_\mathrm{i} + \rho\vec{E}\vec{v}$$

Ezt beírva és átrendezve

$$\boxed{\frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = -\oint_f \vec{S}d\vec{A} + \int_V \left[\vec{j}_\mathrm{v}\vec{E}_\mathrm{i} - \frac{j_\mathrm{v}^2}{\sigma} - \vec{v}\left(\vec{j}_\mathrm{v} \times \vec{B}\right) - \rho\vec{E}\vec{v}\right] dV}$$

A szögletes zárójeles tag fizikai jelentésének kihámozásához idézzük fel azt az ismert összefüggést, miszerint ha egy test $\vec{v}$ sebességgel mozog és rá hat egy $\vec{F}$ erő, akkor ezen erő teljesítménye $P = \vec{F}\vec{v}$. A szögletes zárójelben teljesítmény-sűrűség jellegű tagok állnak. Az első az idegen erők (áramforrások) által végzett munkát adja. A második az ohmos ellenálláson keletkező Joule-hőt. A harmadik tag azt a munkát jelenti, amelyet az Amper-erő végez az áramjárta vezetőkön. Az utolsó tag az elektromos tér által a mozgó töltéseken végzett munkának felel meg.