Matematikai ismétlés: Differenciálás

A skalár- és vektorterek differenciálásával kapcsolatban szokás bevezetni a nabla-operátort:

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}$$

A nabla egy vektoroperátor, amellyel hatása egy skalár vagy vektormezőre úgy működik, mintha a nabla vektorral balról szoroznánk. Ezzel a jelöléssel könnyen megjegyezhetővé válnak a vektoranalitikai azonosságok, mert a vektoroknál tanult szorzás szabályai általában érvényesek maradnak olyan szorzatban, amelynek első tényezője a $\vec{\nabla}$.

Skalármezőre alkalmazva a nabla-operátort egy vektormezőt kapunk (skalárból vektor)

$$\vec{\nabla}\,\varphi=\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\vec{\imath}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi\\ \partial_y\varphi\\ \partial_z\varphi\end{pmatrix}=grad\varphi$$

Vektormezőt kétféleképp lehet szorozni, nézzük először a skaláris szorzást (vektorból skalár, jelentése: forrásosság):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\partial_x a_x+\partial_y a_y+\partial_z a_z=div\,\vec{a}$$

(amennyiben értéke negatív, „nyelő”, ha pozitív: „forrás”)

és vektoriálisan szorozva:

$$\vec{\nabla}\times a=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_y a_z-\partial_z a_y\\ -(\partial_x a_z-\partial_z a_x)\\ \partial_x a_y-\partial_y a_x\end{pmatrix}=rot\,\vec{a}$$

A Nabla-operátor önmagával vett skalárszorzatát Laplace-operátornak nevezzük:

$\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Ezt egy skalármezőre hattatva:

$$\Delta u=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\right)=div(grad\,u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vektorokra a Laplace-operátor komponensenként hat:

$$\Delta\vec{a}=\begin{pmatrix}\Delta a_x\\ \Delta a_y\\ \Delta a_z\end{pmatrix}$$

A következő azonosságokról belátható (házi feladat!), hogy bármely (legalább kétszer differenciálható) skalár, ill. vektormezőre fennállnak:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\varphi\equiv 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\equiv 0$$

A következő fontos matematikai azonosságok bizonyításával nem foglalkozunk.

Stokes-tétel:

$$\oint_g \vec{v}\,d\vec{s}=\int_f rot\,\vec{v}d\vec{A}$$

ahol a g zárt görbe az f felületet határolja.

Gauss-Osztogradszkij tétel vagy divergenciatétel:

$$\oint_f \vec{v}\, d\vec{A} = \int_V div\, \vec{v} d\vec{V}$$

ahol az f zárt felület a V térfogat határa.

Ismétlés:
Az elektromos térerősség

Az elektromos mező pontról pontra történő jellemzéséhez próbatöltéseket (pontszerű töltött testeket) használunk. A próbatöltésre ható erő a tapasztalat szerint arányos a töltésével, a két mennyiség hányadosa már független a próbatöltés töltésétől, kizárólag a mezőt jellemzi a pontszerű töltés helyén. Ezt nevezzük **elektromos térerősség** vektornak, jele $\vec{E}$. Magyarul az elektromos térerősség megadja a kérdéses pontba helyezett pozitív egységnyi töltésre ható erőt, irány és nagyság szerint. A tér jellemző iránya a pozitív töltésre ható erő irányával egyezik meg.

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}(P)}{q}$$

A térerősség mértékegysége: $[E] = 1\frac{N}{C} = 1\frac{V}{m}$

<u>Példa:</u> Ponttöltés elektromos mezője.

A Coulomb-törvényből kapjuk a Q ponttöltés okozta elektromos térerősség nagysága:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Elektromos tér az anyagban, az elektromos indukcióvektor

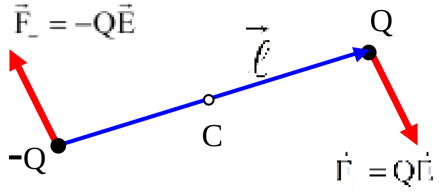
Elektromos dipólus

Az **elektromos dipólus** egy pozitív *Q* ponttöltésből és egy ugyanolyan nagyságú negatív ponttöltésből (-*Q*) áll, melyek távolsága ℓ. Ha ℓ kicsiny a feladatban előforduló egyéb távolságokhoz képest, akkor pontszerű dipólusról beszélünk. A dipólusnyomaték, vagy **dipólusmomentum** definíciója:

$$\vec{p} = Q\vec{\ell},$$

ahol $\vec{\ell}$ az a negatív töltéstől a pozitív felé mutat. Gyakran töltések bonyolultabb rendszere, (pl. molekulák) is dipólussal helyettesíthető.

Határozzuk meg a pontszerű dipólusra ható eredő erőt és forgatónyomatékot homogén külső elektromos mezőben, vagyis ha az elektromos térerősség minden pontban ugyanaz!



Dipólusra ható forgatónyomaték külső elektromos mezőben

A negatív és a pozitív töltésre ható erők: $\vec{F}_- = -Q\vec{E}$ és $\vec{F}_+ = Q\vec{E}$, tehát homogén térben a dipólusra ható eredő erő nulla. A C pontra a forgatónyomaték:

$$\overrightarrow{M}_C = -\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left(-Q\vec{E}\right) + \frac{\vec{\ell}}{2} \times Q\vec{E} = Q\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

A forgatónyomaték vektora (vagyis szabad dipólus esetén a forgástengely) tehát merőleges mind a dipólus tengelyére, mind a térerősségre. A konkrét példában az ábra síkjába befelé mutat, azaz a dipólus az óramutató járásával megegyező irányban fordul el. Ez a forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{p} \parallel \vec{E}$ vagyis a dipólus befordult a tér irányába, vagy pedig azzal pont ellentétesen áll. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ egyirányú, akkor $\vec{M}_C = 0$, és az egyensúlyi helyzet stabil, vagyis kitérítve a dipólust ebből a helyzetből a létrejövő nyomaték igyekszik visszaforgatni abba. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ pont ellentétes irányú, akkor bár a nyomaték nulla, de az egyensúlyi helyzet instabil. Ilyen esetben, ha a dipólust kitérítjük, akkor a létrejövő nyomaték a stabil egyensúlyi helyzet felé próbálja forgatni.

Az elektromos polarizáció jelensége

Az alkalmazott elektromos mező hatására a szigetelő anyag polarizálódik. Indukált polarizáció esetén az alkalmazott elektromos mező, az egybeeső töltésközéppontokat széthúzza így a molekula dipólussá válik, illetve ha a molekulának már eleve volt valamekkora dipólnyomatéka, akkor az megnő. Az $\vec{E}$ elektromos térerősség a $\oplus$ töltést a tér irányában, míg a – töltést azzal ellentétesen mozdítja el. A jelenség tehát poláros és apoláros molekulák esetén egyaránt fellép. Ionrácsok esetében az elektromos mező az ellentétes töltésű ionokra ellentétes irányú erővel hat, ez is növeli a polarizációt.

A polarizáció másik típusa a rendeződési (vagy *orientációs*) polarizáció. Ez a jelenség csak poláros molekulájú anyagokban fordulhat elő. Az elektromos mező a dipólus molekulákat a saját irányába forgatja be, annál inkább minél erősebb a tér és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ez tehát erőteljesen hőmérsékletfüggő, szemben az indukált polarizációval.

Az elektromos polarizációvektor

Vákuumban az elektromos mező leírására egyetlen vektor, az $\vec{E}$ térerősség-vektor elegendő.
Kémiai anyagban azonban egy további vektor bevezetése szükséges, amely az anyag polarizáltságának mértékét adja meg.

Tekintsünk egy szigetelőanyagot vagy dielektrikumot, egy tetszőleges pontja legyen *A*. Jelölje az *A* pont körüli kicsiny térfogatelemet V, és legyen $\sum \vec{p}$ a V térfogatban foglalt molekulák dipólusnyomatékának eredője. Ekkor az *A* pont körüli kicsiny térfogat átlagos polarizáltságát a **polarizációvektorral** jellemezhetjük:

$$\vec{P}(A) = \lim_{V \to 0} \frac{\sum \vec{p}}{V}.$$

A polarizációvektor mértékegysége a C/m^2. A tapasztalat szerint az anyagok nagy részére jó közelítéssel fennáll az alábbi lineáris anyagegyenlet:

$$\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E},$$

vagyis minél erősebb az elektromos mező, annál erősebben polarizálódik az anyag. A κ dimenziótlan arányossági tényezőt **elektromos szuszceptibilitásnak** nevezzük. Ennek értéke vákuum esetén nulla, szigetelőanyagban pedig mindig pozitív: $\kappa > 0$. Ha a térerősség nagy, akkor a szigetelő vezetővé válhat, (ezt a térerősséget átütési szilárdságnak nevezzük,) ilyenkor a fenti egyenlet érvényessége megszűnik, az összefüggés tehát nem lehet minden körülmények között jó közelítés. Másrészt ismerünk olyan anizotrop kristályokat, melyekben a térerősség vektor nem párhuzamos a polarizációvektorral, a fenti egyenlet természetesen ekkor sem igaz.

Elektromos indukcióvektor

Célszerű bevezetni az **elektromos indukcióvektort** ($\vec{D}$) az elektromos térerősség vektor és a polarizációvektor segítségével. Ennek a lineáris kombinációnak a bevezetését az indokolja, hogy vele egyszerű alaptörvény írható fel. Definíció szerint:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}},$$

A mértékegysége nyilvánvalóan egyezik a polarizációvektoréval, tehát C/m^2. Ha felhasználjuk a fenti lineáris közelítést, akkor

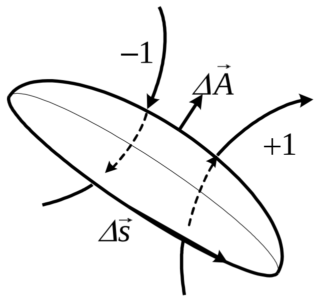
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \vec{E}$$

így kapjuk az elektromos térmennyiségekre vonatkozó **lineáris anyagegyenletet**:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E}},$$

ahol $\varepsilon_r = 1 + \kappa$ a **relatív permittivitás**, amely megadja, hányszor nagyobb az illető szigetelő vagy dielektrikum permittivitása a vákuuménál, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ pedig az **abszolút permittivitás**.

Az elektromos mező szemléltetésére az indukcióvonalakat használhatjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek az érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli elektromos indukcióval. Az **elektromos fluxus** (Ψ) mindig irányított felületre vonatkozik, és számértékétúgy szemléltetjük, hogy megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát. Amennyiben az indukcióvonal a felületelem vektorral megegyező irányban döfi a felületet, akkor az +1 járulékot ad, ha ellenkező irányban, akkor –1 a járuléka.



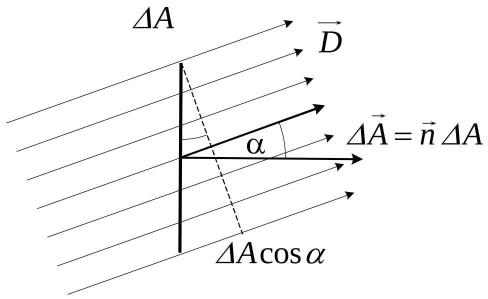
A peremgörbe és a felületi normális irányítása, a felületet döfő indukcióvonalak

Tekintsünk ΔA felületet, és számítsuk ki a felületre az elektromos indukció-fluxust. A felületvektor $\Delta\vec{A}$, zárjon be α szöget az indukcióvektorral. Ha ΔA elegendően kicsiny, akkor az indukció már homogénnek tekinthető, és az elemi kicsiny indukció-fluxus:

$$\Delta\Psi = D \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = \vec{D}\Delta\vec{A}$$

Egy tetszőleges A felületre pedig integrálással kaphatjuk meg a fluxust, a fenti értelmezésnek megfelelő matematikai képlet tehát:

$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}.$$

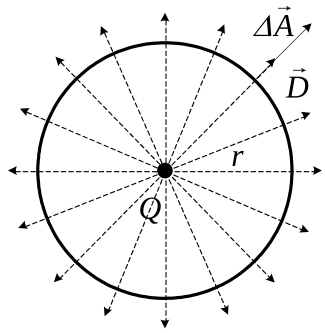


Indukció-fluxus a ΔA felületre

Felhasználva, hogy a indukció mértékegysége C/m^2, az indukció-fluxus mértékegysége C (ugyanaz a coulomb, mint a töltésé).

Az elektrosztatika második alaptörvénye

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy milyen kapcsolat van a mezőt keltő töltés és a kialakult mező indukcióvektora között. Ennek megválaszolására tekintsünk egy vákuumban elhelyezett ponttöltést, és számoljuk ki a fluxusát egy zárt felületre, amely legyen egy *r* sugarú koncentrikus gömb felszíne!



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület koncentrikus gömb

Látható, hogy ha feltesszük, hogy az indukcióvonalak forrása csak a töltés lehet, (a vákuum miért is lenne forrás?), akkor akármilyen nagyra választjuk a gömb sugarát, a gömbfelületen ugyanazok a vonalak mennek át, tehát a fluxus nem függ a felület nagyságától, csak a töltéstől. Mivel kétszer nagyobb sugárhoz négyszer nagyobb felület tartozik, ahhoz, hogy Ψ ugyanakkora maradjon, az indukciónak, és így a térerősségnek kell negyedére csökkennie, ez pedig pont a Coulomb törvény lényege. Vezessük le most fordítva precízebben!
Mivel a ponttöltés által keltett térerősség ismert:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

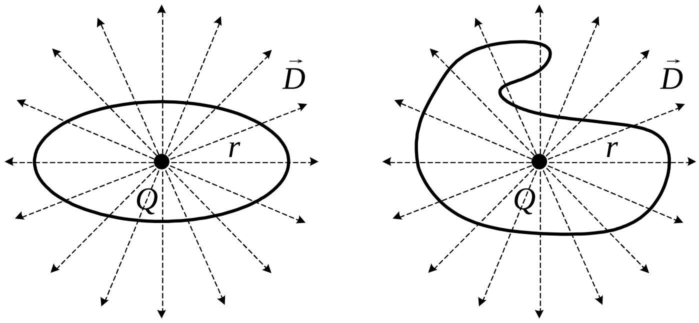
az elektromos indukciót egyszerűen kapjuk a térerősségből: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, ezzel

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \,.$$

Így a zárt felületre számított fluxus egyenlő a felületen belüli töltéssel:

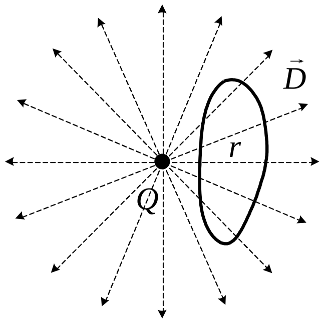
$$\overset{0}{\Psi} = \oint_A \vec{D}d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}dA = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\oint_A dA = \frac{Q}{4r^2\pi}4r^2\pi = Q$$

A számolást az a tény egyszerűsítette le, hogy az indukcióvektor nagysága mindenütt ugyanakkora, mivel csak a töltéstől mért *r* távolságtól függ, az pedig a gömbfelületen állandó. Az eredmény viszont akkor is változatlanul érvényes, ha a *Q* töltést körülölelő zárt felület nem egy koncentrikus gömb, hiszen bármely a *Q* töltést magába foglaló zárt felületre a fluxus ugyanennyi, mivel a *Q*-ból kiinduló összes indukcióvonal átdöfi a *Q*-t magába foglaló zárt felületet. Ezt mutatják a következő ábrák.



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület

Ha a felület nem foglalja magába a *Q* töltést, akkor a fluxus nulla. Ahol az indukcióvonal bemegy ott –1 a járulék, ahol kijön ott +1.



Ha a zárt felület nem foglalja magába a Q töltést, akkor a fluxus nulla

Tapasztalat szerint tetszőleges töltéselrendezés estén és kémiai anyag jelenlétében is igaz, hogy zárt rögzített felületre az elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt összes töltéssel.

$$\oint_A \vec{D}\,\overrightarrow{dA} = Q$$

A fenti egyenlet az elektrosztatika II. alaptörvénye, gyakran **Gauss törvény**nek nevezik. Q a V térfogatban foglalt töltések algebrai összegét jelenti, A pedig a V térfogat burkoló felülete. Az elektromos indukcióvonalak forrásai a pozitív töltések, nyelői pedig a negatív töltések, más szóval az indukcióvonalak a pozitív töltésen erednek és a negatív töltésen végződnek.

A Gauss törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$.

Fontos megemlíteni, hogy a $\vec{D}$ értéke nem függ attól, hogy vákuumban vagyunk vagy szigetelő közegben, mivel csak a valódi, azaz nem polarizációval létrejött töltés működik forrásként. A térerősség viszont függ az anyag minőségétől, a Coulomb törvény pedig a következőképp általánosítható:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qQ}{r^2}$$

P forrásai: polarizált töltések. Irány: negatívtól a pozitív felé $div(-\vec{P}) = \rho'$

D forrásai: szabad töltések. Irány: pozitívtól negatív felé $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$.

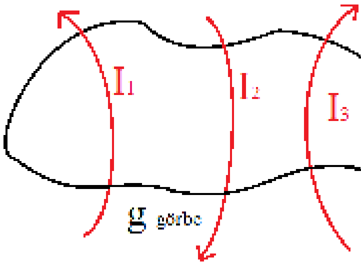
Összeadva a két egyenletet: $div(\vec{D} - \vec{P}) = \rho + \rho'$. Viszont definíció szerint $\vec{E} = \dfrac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}$, tehát

$\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$, vagyis

E forrásai: szabad és polarizált töltések, irány: pozitívtól negatív felé.

A Maxwell-egyenletrendszer

Ez a XIX. sz. egyik legnagyobb hatású egyenletrendszere, főleg azért, mert ebből az egyenletrendszerből vezették le az elektromágneses hullámok létezését. Az elméleti elektrodinamikában ezeket axiómaként mondjuk ki és belőlük vezetjük le azokat a törvényszerűségeket, amelyeket megfigyelésekkel igazolni lehet.



1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum_n I_n + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}\overrightarrow{dA} \quad \text{és} \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

azaz mozgó töltések vagy az időben változó elektromos mező örvényes mágneses mezőt kelt.

2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}\overrightarrow{dA} \quad \text{és} \quad rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

azaz időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt kelt.

3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D}\overrightarrow{dA} = Q \quad \text{és} \quad div\vec{D} = \rho,$$

azaz az elektromos tér forrásai a töltések.

4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B}\overrightarrow{dA} = 0 \quad \text{és} \quad div\vec{B} = 0,$$

vagyis a mágneses tér forrásmentes.

A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához szükségesek az anyagegyenletek is, amelyek megadják, hogy mi a kapcsolat egyfelől az elektromos térerősség és az elektromos indukció, másfelől a mágneses térerősség és a mágneses indukció között. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ és $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, valamint az Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ahol a térerősségbe beleértjük az idegen térerősséget is. Míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek közelítő jellegűek és csak bizonyos anyagokra jelentenek jó közelítést. Nem adnak számot pl. a ferromágnesesség, ill. a permanens mágnesesek létezésről.

Az elektrosztatika 1. Alaptörvénye és a skalárpotenciál

<u>1. Tétel:</u> A következő 3 feltétel egymással ekvivalens, azaz ha bármelyik is igaznak bizonyul egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőre, a másik kettő is mindenképp igaz:

1. $rot\,\vec{v} \equiv 0$
2. $\oint_g \vec{v}\,d\vec{s} = 0$ bármely g görbére (ami nyilván azt is jelenti, hogy két pont közötti integrálás független attól a görbétől, amelyik a két pontot összeköti)
3. létezik U skalármező (melyet potenciálnak is neveznek), hogy $\vec{v} = \pm grad\,U$

Bizonyítás:
1 → 2 a Stokes-tétel alapján $\oint_g \vec{v}\, d\vec{s} = \int_f rot\, \vec{v} d\vec{A} = 0$

2 → 3 konstruktívan bizonyítunk, azaz megadunk egy ilyen U skalármezőt. Ehhez jelöljünk ki egy tetszőleges P_0 pontot, majd legyen U értéke bármely másik P pontban a következő integrál, amelynek értéke rögzített P_0 esetén a 2. pont miatt egyértelmű:

$$U(P) = \int_{P_0}^{P} \vec{v}\, d\vec{s}$$

3 → 1 A $rot\ grad\ U = 0$ azonosságból rögtön adódik.

Definíció: **Konzervatívnak** nevezünk egy erőteret, ha az erőre érvényes az 1. Tétel bármelyik pontja.
Az elektrosztatikus mező első alaptörvénye: Az **elektrosztatikus mező konzervatív**:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{azaz} \quad rot\vec{E} = 0$$

Ez a 2. Maxwell egyenletből következik, amelyben a jobboldal azért lett 0, mert akkor beszélhetünk elektrosztatikus esetről, ha időben semmilyen térmennyiség nem változik. Az 1.M.E.-ből következik, hogy az egyenáramnak időben állandó mágneses tere van, tehát az alaptörvény arra is vonatkozik. Ismétlésként tekintsük át az alaptörvény következményeit és fizikai jelentését.

Az elektromos mezőben a két pont között a *q* próbatöltésen az elektromos mező által végzett munka:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E} d\vec{r}\ .$$

Definíció szerint a két pont közötti feszültség az egységnyi próbatöltésen a két pont között a mező által végzett munka:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Homogén térben a térerősség-vektorral párhuzamos *d* nagyságú elmozdulás esetén ez a formula leegyszerűsödik:

$$\boxed{U=Ed}$$

Az elektromos (más elnevezésben: villamos) feszültség független a próbatöltéstől, csak a mezőre és a benne felvett két pontra jellemző.
Az 1. Tétel alapján abból, hogy egy erőtér konzervatív (tehát fennáll a 2. pont), következik az, hogy ha kijelölünk egy kitüntetett *A* kezdőpontot, bármely másik (pl. *B*) pont egyértelműen jellemezhető azzal, hogy mekkora munkát végez az erő, ha a *B*-ből az *A*-ba megy a test. Ezt a munkát úgy hívjuk, hogy a test **potenciális** (vagy helyzeti) **energiája** a *B* pontban. Tehát ha a *q* töltés elmozdul az A pontból a B-be, az elektromos mező által végzett munka éppen a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével egyenlő:

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B)\ .$$

Az egységnyi töltésre jutó potenciális energiát az elektromos mezőben potenciálnak nevezzük:

$$U = \frac{E_p}{q}\ .$$

Az elektrosztatikus mezőben a feszültség egyben a potenciálkülönbség is.

$$U_{A,B} = \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = U(A) - U(B)$$

Az elektrosztatikus potenciál egy állandó erejéig határozatlan. Megállapodás szerint a potenciált sokszor a végtelenben vesszük zérusnak: $U(\infty) = 0$. Ekkor:

$$U(P) = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{r}$$

Vagyis egy tetszőleges pont potenciálja megmutatja, hogy mennyi munkát végez az elektrosztatikus mező, amíg az egységnyi pozitív töltést a tér P pontjából a végtelenbe szállítja. A pozitív töltésekre az alacsonyabb potenciálú hely, a negatív töltésekre a magasabb potenciálú hely felé irányuló elektromos erő hat.[1]

Példa: A **ponttöltés potenciálja** attól r távolságra, felhasználva a térerősségre korábban kapott összefüggést:

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = kQ \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[\frac{-1}{r} \right]_r^\infty = \frac{kQ}{r}$$

A térerősség és a potenciál közötti összefüggés fordított alakban:

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{gradU}}$$

ahol nem szabad elfelejteni, hogy a potenciált az 1. tétel 3. pontja alapján tudtuk bevezetni.

A konzervativitásból azonnal adódik **Kirchhoff huroktörvénye**, vagyis hogy bármely zárt hurokra

$$\sum U = 0.$$

A fenti 1. Tétel mutatja, hogy mindez ez pontosan akkor tehető meg, ha a térerősség örvénymentes, vagyis rotációja nulla. Ebből viszont az következik, hogy ha a mágneses indukció időben változik, akkor a feszültség eredeti értelmezési módja nem működik. Emiatt tovább kell lépnünk.

A vektorpotenciál

Ismét egy matematikai azonosságot veszünk alapul.

2. Tétel: A következő 3 feltétel egymással ekvivalens, azaz ha bármelyik is igaznak bizonyul egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőre, a másik kettő is mindenképp igaz:

1. $div\,\vec{v} \equiv 0$
2. $\oint_f \vec{v}\,d\vec{f} = 0$ bármely zárt *f* felületre,
3. létezik $\vec{a}$ vektormező, hogy $\vec{v} = rot\,\vec{a}$

Bizonyítás:

$1 \rightarrow 2$ a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján $\oint_f \vec{v}\,d\vec{A} = \int_V div\,\vec{v} dV = 0$

$2 \rightarrow 3$ nem bizonyítjuk.

$3 \rightarrow 1$ A $\mathrm{div rot}\,\vec{a} \equiv 0$ azonosságból rögtön adódik.

Bevezetünk egy új, matematikai segédeszköznek szánt mennyiséget, az $\vec{A}$ **vektorpotenciált**.

Legyen $\vec{A}$ definíció szerint az a mennyiség, amire teljesül, hogy

[1] Előbbi annak felel meg, hogy egy tömegpontra a Föld gravitációs terében lefelé irányuló erő hat, ha ennek hatására elmozdul a tömegpont, potenciális energiája csökken. Negatív tömeg nincs, a taszításnak nincs gravitációs megfelelője.

$$\boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}}$$

Mivel a IV. Maxwell-egyenlet miatt B divergenciája mindig nulla, ezért a 2. tétel 3. pontja miatt vektorpotenciál mindig létezik. Helyettesítsük be ezt a definíciós összefüggést most a II. M. egyenletbe és használjuk fel azt, hogy a független változók szerinti deriválások felcserélhetők:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{A} = -rot\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad /+rot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Kaptunk tehát egy olyan vektormezőt, amelynek mindig nulla a rotációja. Így a **feszültség általánosításaként** bevezethetünk egy U skalármezőt úgy, hogy

$$-grad\,U = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Az ilyen módon értelmezett feszültség mindig létezik. Általánosan az E és B térmennyiségek a következő módon egyértelműen megkaphatóak a potenciálokból:

$$\begin{cases} \vec{E} = -grad\,U - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\,\vec{A} \end{cases}$$

Fordítva nem áll fenn az egyértelműség. Tegyük fel, hogy adottak a térmennyiségek és találtunk hozzájuk egy konkrét U és A potenciál-szettet, amely ezeket a tereket szolgáltatja. Legyen f tetszőleges (differenciálható) skalármező, amelyet mértékfüggvénynek nevezünk. Ekkor az alábbi, ún. **mértéktranszformáció**val előállt új

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'} = \vec{A} + grad\,f \\ U' = U - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

potenciál-szett is ugyanazt az E és B teret állítja elő. Ennek bizonyítása szorgalmi feladat (behelyettesítéssel történik). Azt, hogy a Maxwell-egyenletek invariánsak erre a mértéktranszformációra, mértékinvarianciának, mértékszimmetriának vagy mértékszabadságnak nevezzük.

A Poisson-egyenlet és megoldása

Kérdés: Adott töltés-, ill. áramrendszer milyen potenciálteret hoz létre? Hogyan tudjuk ezt kiszámolni?

Tegyük fel, hogy a közeg lineáris, tehát $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, ezt beírva a 3. ME-be kapjuk, hogy

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho \ .$$

Ebbe a térerősség elektrosztatikus esetben érvényes $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,U$ kifejezését beírva:

$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon \cdot grad\,\mathrm{U}\right) = \rho$$

Ha elhanyagoljuk a permittivitás helykoordinátáktól való esetleges függését, akkor ε-t kiemelhetjük a deriválás elé,

$$\varepsilon\mathrm{div}\left(grad\,\mathrm{U}\right) = -\rho$$

így kapjuk az ún. Poisson-egyenletet:

$$\Delta\mathrm{U} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Hasonlóan (csak kissé bonyolultabban) kapjuk egyenáramok rendszerére, hogy

$$\Delta\vec{\mathrm{A}} = -\mu\vec{j}\ .$$

A Poisson-egyenlet egy másodrendű inhomogén elliptikus típusú parciális differenciálegyenlet. Fontos szerepet játszik több tudományterületen, pl. a félvezető-fizikában, ahol a töltéssűrűség a különböző típusú mozgó és rögzített töltések (lyuk, szabad elektron, szennyező atomtörzsek) koncentrációtól függ.

A Poisson-egyenletre egy alapmegoldást adunk, a legegyszerűbb formában. Ez akkor áll elő, ha a vizsgált pontba tesszük a koordináta-rendszerünk origóját. Ekkor:

$$U(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\infty}\frac{\rho(r)}{r}dV$$

Ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ az origótól való távolság és az integrálás a teljes térre megy, ill. oda, ahol a töltéssűrűség nem nulla.

A vektorpotenciált hasonlóan kapjuk, csak komponensenként:

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\vec{j}(r)}{r}dV$$

Feladatok

4. Elektrosztatikus potenciál $U=u_o(3x+4z)$ módon függ a helykoordinátáktól, $u_o=2$ V/m. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség az origóban és a (2, 1, 0) pontban. Milyen alakúak az ekvipotenciális felületek?

Megoldás: A fenti képletet használva, az u_0 konstanst a deriválásból kiemelve

$$\vec{E} = -u_0 \mathrm{grad}(3x+4z) = -u_0\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = -6\vec{i} - 8\vec{k}$$

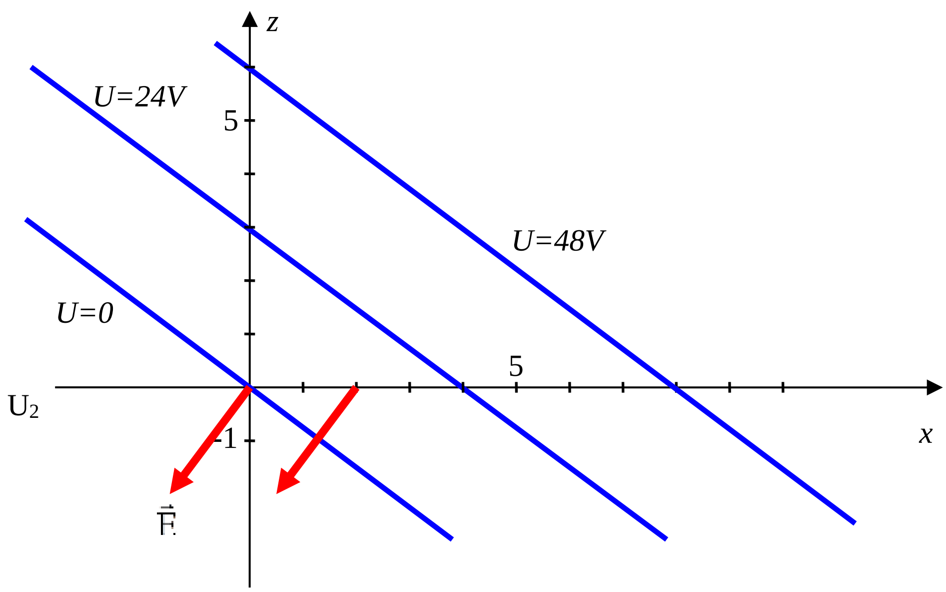
Azt kaptuk, hogy a térerősség független a helytől, tehát az origóban és a (2, 1, 0) pontban is ugyanaz. Az ekvipotenciális felületeket úgy kapjuk, hogy a potenciál-függvényt egy konstanssal tesszük egyenlővé:

$u_o(3x+4z)=C$

Ebből a z-t kifejezve:

$$z = \frac{C}{4u_o} - \frac{3}{4}x$$

Ez lényegében ax+b alakú, tehát egy C-től függő egyenes egyenlete. Ábrázoljuk az xz koordináta rendszerben (az y változó most érdektelen).

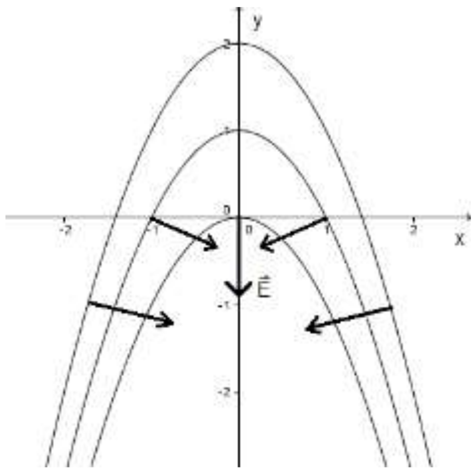


Az ábrán kék vonalak jelzik az ekvipotenciális felületeket. Az origón átmenő vonalat pl. úgy kapjuk, hogy a C helyébe nullát írunk. Ellenőrzésként a többi vonalnál írjuk be a tengelymetszetek koordinátáit a fenti egyenletbe, hogy kijön-e feszültségnek az az érték, ami az ábrán szerepel. A vastag piros nyíl a térerősséget ábrázolja (nem méretarányosan). Látható, hogy merőleges az ekvipotenciális felületre.

1. Elektrosztatikus potenciál **U=ax²+by** módon függ a helykoordinátáktól, a=1V/m², b=1V/m. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség az origóban és a (2, 1) pontban. Milyen alakúak az ekvipotenciális felületek?

Megoldás:

$$\vec{E} = -grad\ U = -\begin{pmatrix}2ax\\ b\\ 0\end{pmatrix}$$



A térerősség iránya merőleges az ekvipotenciális felületekre, csökkenő potenciál irányába mutat. Az ekvipotenciális vonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával.

2. Ponttöltés elektromos mezője és potenciálja

Felhasználjuk, hogy $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ és $\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$

Ezekből a *Q* ponttöltés okozta elektromos térerősség nagysága:

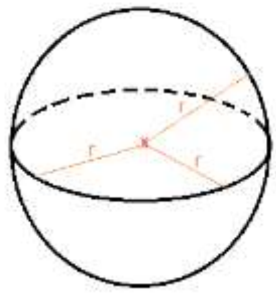
$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

A ponttöltés potenciálja attól *r* távolságra:

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = kQ\int_r^\infty \frac{1}{r^2}dr = kQ\left[\frac{-1}{r}\right]_r^\infty = \frac{kQ}{r}$$

Gömbfelületen egyenletesen eloszló töltés:

$$U = k\sum\frac{Q_i}{r_i} \rightarrow' k \cdot \int\frac{\delta}{r}dV$$



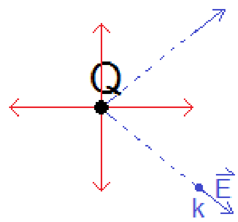
Példa: Ponttöltés elektromos terének tulajdonságai

Vizsgáljuk meg a Q ponttöltés elektromos terének tulajdonságait. Legyen az egyszerűség kedvéért a töltés az origóban. Ekkor a térerősség iránya egy adott (x,y,z) pontban megegyezik az origóból a pontba húzott helyvektor irányával. A térerősség komponensei:

$E_x = \frac{kQ}{r^3}x$, $E_y = \frac{kQ}{r^3}y$, $E_z = \frac{kQ}{r^3}z$, ahol a nevező függ mindhárom koordinátától: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. A Pithagorasz tételt alkalmazva visszakapjuk a korábban levezetett térerősség-vektor nagyságát: $E = \frac{kQ}{r^2}$.

Vagyis:

$$\vec{E} = k\cdot\frac{Q}{r^3}\cdot\vec{r} = \frac{kQ}{r^3}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{kQ}{r^3}\cdot x\\ \frac{kQ}{r^3}\cdot y\\ \frac{kQ}{r^3}\cdot z\end{pmatrix} = k\cdot\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{r_0}$$



3. Számoljuk ki először a **divergenciát**, ehhez a megfelelő parciális deriváltak kellenek.

$$\partial_x E_x = kQ\left(\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot x}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right),$$

ha $r \neq 0$. A $\partial_y E_y$ és a $\partial_z E_z$ deriváltakat is hasonlóan kapjuk (csak az x-eket kell y-ra és z-re kicserélni). A divergencia a három derivált összege:

$$div\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{kQ}{r^3}\left(3 - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) = 0$$

Azt a nem meglepő eredményt kaptuk, hogy ponttöltés elektromos terének divergenciája a töltésen kívüli pontokban nulla, vagyis az elektromos térnek a töltéseken kívül nincsenek forrásai. Ez egyébként következik a Gauss-tételből is.

4. A **rotáció** számítása:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y)\vec{i} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z)\vec{j} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x)\vec{k}$$

Először a vegyes parciálisokat kell kiszámolni. Mivel a koordináták egymástól függetlenek, csak a nevezőket kell deriválni:

$$\partial_y E_z = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2y\cdot z}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5} \quad \text{és} \quad \partial_z E_y = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2z\cdot y}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5}.$$

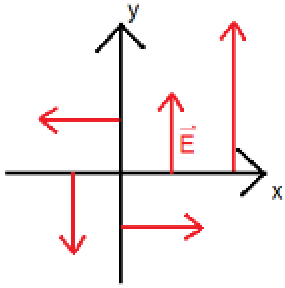
Látható, hogy az egy zárójelben lévő vegyes parciálisok megegyeznek, egymásból kivonva őket, nullát kapunk, tehát ponttöltés tere (és ezzel bármilyen sztatikus töltés-elrendezés tere) örvénymentes.

Abban a pontban, ahol a ponttöltés elhelyezkedik, a töltéssűrűség végtelen, a térerősségnek szingularitása van, a deriváltak nem értelmezhetőek.

5. Elektromos mező térerőssége $\vec{E} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Mekkora a mező rotációja?

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ -(\partial_x E_z - \partial_z E_x) \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} = rot\,\vec{E} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vagyis a $rot\,\vec{E}$ Z-irányba mutat (örvényesség iránya jobbkéz szabály szerint)



Szorgalmi feladat: Milyen csillapítással tehető ez a rotáció pontosan nullává?

r^α-val kell megszorozni a térerősséget úgy, hogy a rotáció pontosan nulla legyen, ahol r^α középpontosan szimmetrikus az origóra. Vagyis $r^\alpha = \sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}$, a paraméter α.

Eszerint

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = \frac{d}{dx} x \cdot \sqrt{x^2+y^2}^{\alpha} - \frac{d}{dy} y \cdot \sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}$$

A deriválások eredménye:

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}\right)=\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}+x^2\cdot\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha-2}$$

$$-\frac{d}{dy}\left(-y\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}\right)=\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}+y^2\cdot\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha-2}$$

A 2 összege:

$$2r^{\alpha}+\alpha r^2 r^{\alpha-2}=(2+\alpha)r^{\alpha}$$

Csak akkor nulla, ha $\alpha=-2$.

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{-2}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}, ekkor\ rot\vec{E}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

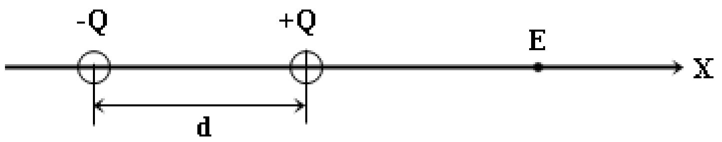
Mit veszünk észre?

Elektromos dipólus térerőssége és potenciálja

Vegyünk fel az x tengely mentén egy –Q és +Q töltést, egymástól d távolságban. A ponttöltések tere és potenciálja külön-külön a szokásos összefüggésekkel számolható:

$$E=\frac{kQ}{r^2}\ és\ U=\frac{kQ}{r}$$

(vákuumban vizsgálódunk, k = $9\cdot10^9$). A modell az alábbi ábrával szemléltethető:



A dipólus térerősségének kiszámításához vesszük a –Q és +Q töltések által létrehozott terek előjelhelyes összegét, amely matematikailag a következőképpen írható fel:

$$E=kQ\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+d)^2}\right)=kQ\left(\frac{(x+d)^2-x^2}{x^2(x+d)^2}\right)$$

Mivel a számlálóban $(x+d)^2=x^2+2xd+d^2$, így x^2-tel egyszerűsíthetünk. A nevezőben a zárójelet felbontva nyerjük:

$$E=kQ\left(\frac{2xd+d^2}{x^4+2x^3d+x^2d^2}\right)$$

Ha $x\to\infty$, az összefüggésben x^4 tart a leggyorsabban végtelenhez, ez lesz a vezető tag. Ezt felhasználva a térerősség:

$$E\to\frac{kQ2xd}{x^4}\to\frac{kQ2d}{x^3}=\frac{2kp}{x^3}$$

Vagyis aszimptotikusan a térerősség egyenesen arányos a p dipólmomentummal és a távolság harmadik hatványával csökken, nem pedig a másodikkal, mint egy darab ponttöltés esetén. A potenciál számítása a fent leírtakból kiindulva:

$$U=kQ\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+d}\right)=kQ\left(\frac{x+d-x}{x(x+d)}\right)=\frac{kQd}{x^2+xd}$$

Ez esetben ha $x\to\infty$, a nevezőben a vezető tag az x^2 lesz. Folytatva a gondolatmenetet:

$$U\to\frac{kp}{x^2}$$

Tehát a potenciál $1/x^2$ szerint tart a nullához, nem $1/x$ szerint, mint ponttöltés esetén.

Elektrosztatikus mezőben vizsgálódunk, ami azt jelenti, hogy fennáll az $\vec{E} = -gradU$ összefüggés. Ellenőrzés céljából számoljuk ki ezzel a térerősséget az x →∞ határátmenetben a potenciálból:

$$\vec{E} = -gradU = -\frac{d}{dx}\left(\frac{kQd}{x^2}\right)\vec{\imath} = -kQd\left(\frac{-2}{x^3}\right)\vec{\imath}$$

Egyszerűsítés után ebből visszakapjuk a néhány sorral fentebb levezetett összefüggést.

Példa: Gömb elektromos tere

Ponttöltés elektromos tere könnyen adódik a **Gauss-törvényből** is. Ehhez egyszerűen egy olyan R sugarú gömbfelülettel kell képzeletben körbevenni a ponttöltést, amely középpontjában a töltés ül, ekkor a szimmetria-tulajdonságokat kihasználva Gauss törvényében a felületi integrál kiszámítása szorzássá egyszerűsödik: $\varepsilon_0 E 4\pi R^2 = Q$.

Gauss: $\oint_f \vec{D}\overrightarrow{dA} = Q$, mivel $\vec{D}||\overrightarrow{dA}$, így $\oint_f DdA = D\oint_f dA = D4\pi r^2 = Q$

Tudván, hogy $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ →

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Vagyis az egyik Maxwell-egyenletből levezettük a Coulomb törvényt.

Vegyük észre azonban, hogy itt sehol sem használtuk ki, hogy a ponttöltés pontszerű, még azt sem, hogy kicsi a mérete, csupán azt, hogy gömbszimmetrikus töltéseloszlás és hogy a választott képzeletbeli gömbfelületen belül van az összes töltés (tehát a töltések távolsága a középponttól nem nagyobb, mint R), a középpontok pedig egybeesnek. Tehát bármilyen gömbszimmetrikus töltéseloszlás erőtere kívülről úgy néz ki, mintha az összes töltés a középpontba lenne koncentrálva. Speciálisan igaz ez térfogatában egyenletesen töltött r sugarú gömbre, valamint a felületén egyenletesen töltött r sugarú gömbhéjra, ha $r \le R$.

Továbbmenve, ha ez utóbbi gömbön kívül a térerősség mindenhol helyettesíthető a ponttöltés által keltett térrel, akkor, ha integráljuk ezt a térerősséget R-től a végtelenig, nem lesz különbség, vagyis a gömbön kívül a potenciál is megegyezik a két esetben. Végül megkaptuk a töltött gömb kapacitásának levezetésénél is használandó állítást: egy Q töltésű R sugarú fémgömb potenciálja (ez egy érték, mivel ekvipotenciális a fémdarab) megegyezik egy Q ponttöltés által keltett tér potenciáljával a töltésről R távolságban: $U = k\frac{Q}{R}$

A gömb felületéről kiinduló indukcióvonalak sűrűsége a gömb felületének növelésével fordítottan arányos.

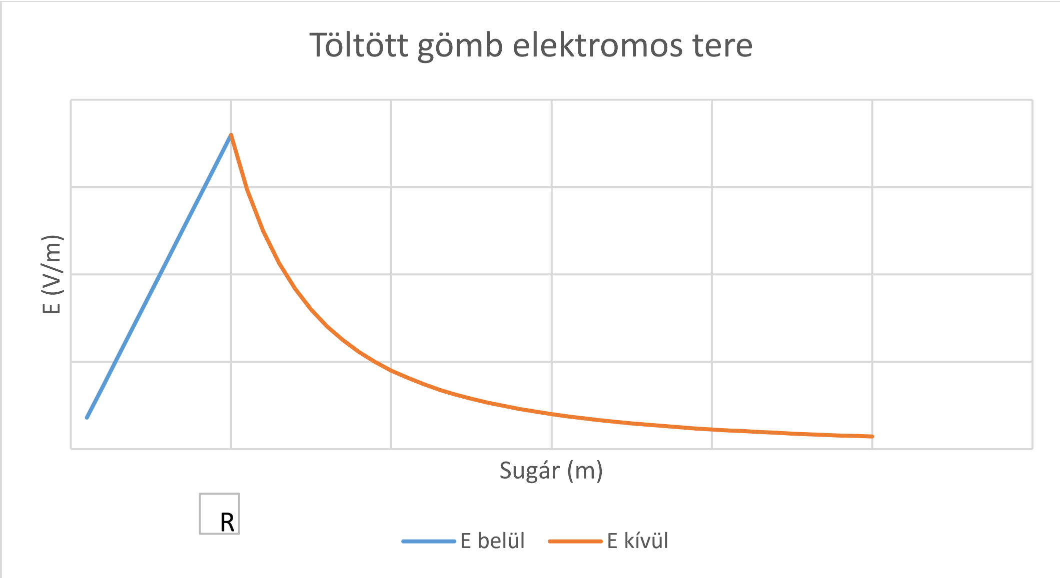
Amennyiben a gömb fém, nincs benne térerősség. Ha azonban szigetelő és a töltésmegoszlás egyenletes a gömb térfogatában, a következő eset áll fenn:

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q_{belül} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Egyszerűsíthetünk $4\pi r^2$-el, majd kifejezve a térerősséget:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon} r \;,$$

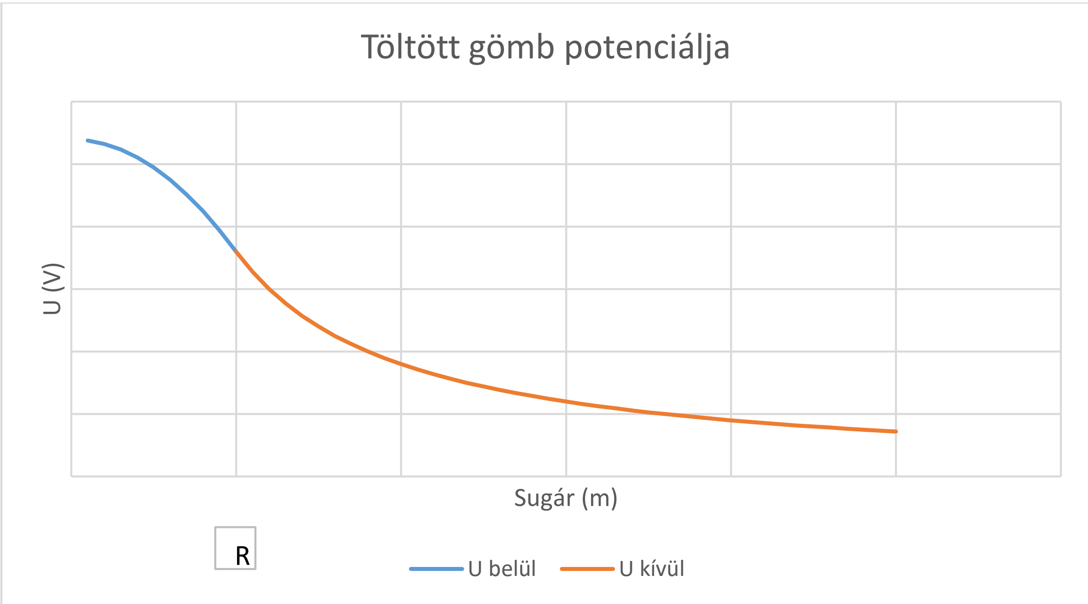
vagyis a gömb belsejében a térerősség a sugárral lineárisan nő, míg kívül a korábban levezetettek alapján $\frac{1}{r^2}$ szerint változik, ahol R a gömb sugara:



Potenciál függvénye:

kívül: $U_{R\to\infty} = \int_R^\infty \vec{E}\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$

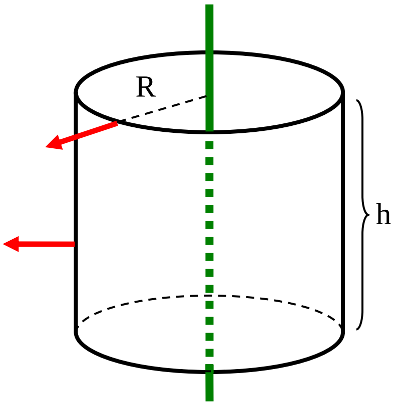
belül: $U_{r-R} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\int_r^R r\,dr = \frac{\rho}{3\varepsilon}\frac{1}{2}(R^2 - r^2)$



Példa: Hengerszimmetrikus töltéselrendezés elektromos tere

Adjuk meg a végtelen hosszúságú, egyenletes λ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes fonál elektromos terének erősségét és potenciálját! ($\lambda = \frac{Q}{l}$)

Vegyünk fel az egyszerűség kedvéért olyan koordináta-rendszert, ahol a töltött fonál a z tengellyel esik egybe. Ekkor szimmetria-okokból a térerősségnek nem lesz z komponense (ha lenne, az szimmetria-sértés lenne), hanem az x-y síkban sugárirányban kifelé (negatív töltés esetén befelé) mutat. Akkor használhatjuk könnyedén a **Gauss-tétel**t, ha olyan felületet találunk, amely mentén a (piros nyíllal jelölt) térerősség nagysága és a felülettel bezárt szöge állandó. Próbálkozzunk egy hengerpalásttal.



A henger alap- és fedőlapján a térerősség-vektor a felülettel párhuzamos, a felület normálisával 90°-os szöget zár be, vagyis ott a felületi integrál eltűnik. Integráljunk a palástra:

$$\oint_{pal.} \vec{D} d\vec{A} = \oint_{pal.} \varepsilon E dA = \frac{1}{4\pi k} E \oint_{pal.} dA = \frac{1}{4\pi k} E\, 2R\pi h = Q = \lambda h$$

amiből:

$$E = \frac{2k\lambda}{R},$$

tehát a térerősség a távolság reciprokával csökken. Mivel sehol sem használtuk ki, hogy a fonál vékony, az eredmény érvényes tetszőleges hengerszimmetrikus töltéseloszlás, pl. térfogatában egyenletesen töltött R sugarú henger, valamint a felületén egyenletesen töltött R sugarú hengerpalást terére a középvonaltól r távolságban, ha $R \le r$.

A potenciál számításánál vékony fonál esetén a nulla szint megválasztása jelent problémát. Ha a fonálnál lenne a nulla szint, akkor ott a végtelen térerősség okoz gondot. Ha a végtelenben választanánk a nullát, akkor pedig a potenciál lenne végtelen, mint ahogy azt mindjárt látni fogjuk. Tegyük fel, hogy valamilyen tetszőlegesen választott, majd rögzített R_0 távolságra vesszük a nulla szintet és integráljunk tetszőleges r-től R_0-ig:

$$U(r) = \int_r^{R_0} \vec{E} d\vec{r} = 2k\lambda \int_r^{R_0} \frac{1}{r} dr = 2k\lambda \left[\ln r\right]_r^{R_0} = 2k\lambda \ln\left(\frac{R_0}{r}\right)$$

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor a fonál nem vékony, hanem egy R sugarú hengernek tekinthető, amely térfogatában egyenletes a ρ töltéssűrűség. Számoljuk ki most a térerősséget a hengeren **belül**, vagyis a henger tengelyétől r<R távolságban.

$$D \cdot \int_{pal.} dA = Q$$

$$\varepsilon E 2r\pi h = \rho r^2 \pi h$$

Egyszerűsítés után λ-val kifejezhetjük a térerősséget:

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon} \cdot r$$

A térerősség a henger belsejében r-el lineárisan nő, kívül viszont a gömbbel ellentétben nem $\frac{1}{r^2}$, hanem csak $\frac{1}{r}$ szerint változik. A potenciál ugyanitt, a henger széléhez képest:

$$U_{r<R} = \int_r^R E dr = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon} r\, dr = \frac{\rho}{2\varepsilon} \int_r^R r\, dr = \frac{\rho}{2\varepsilon} \left[\frac{r^2}{2}\right]_r^R = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot (R^2 - r^2)$$

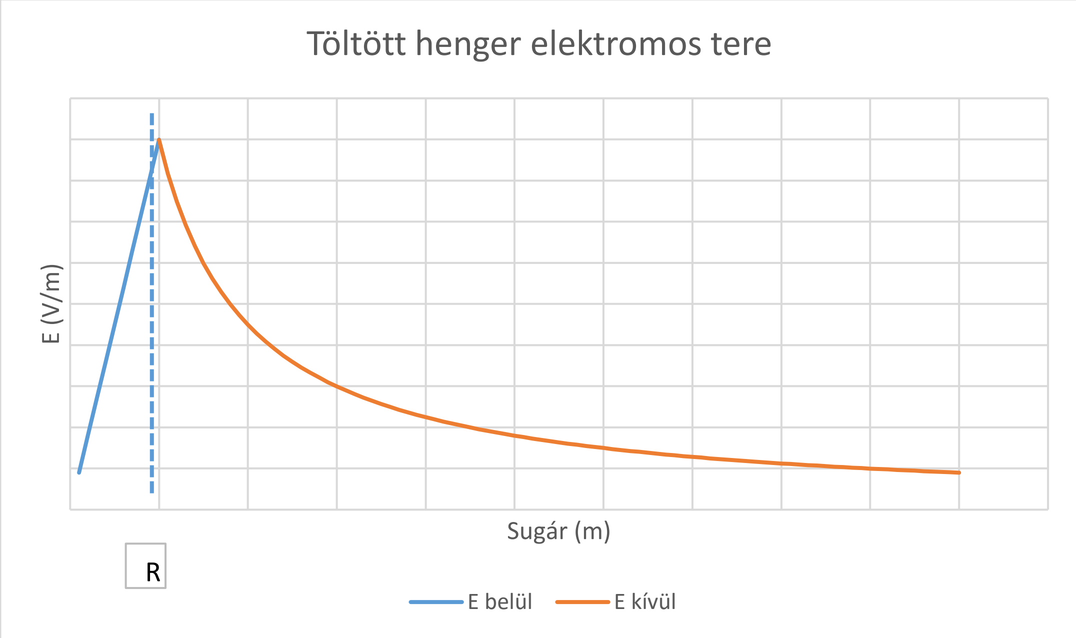
Az elektromos mező folytonosságának bizonyítása:

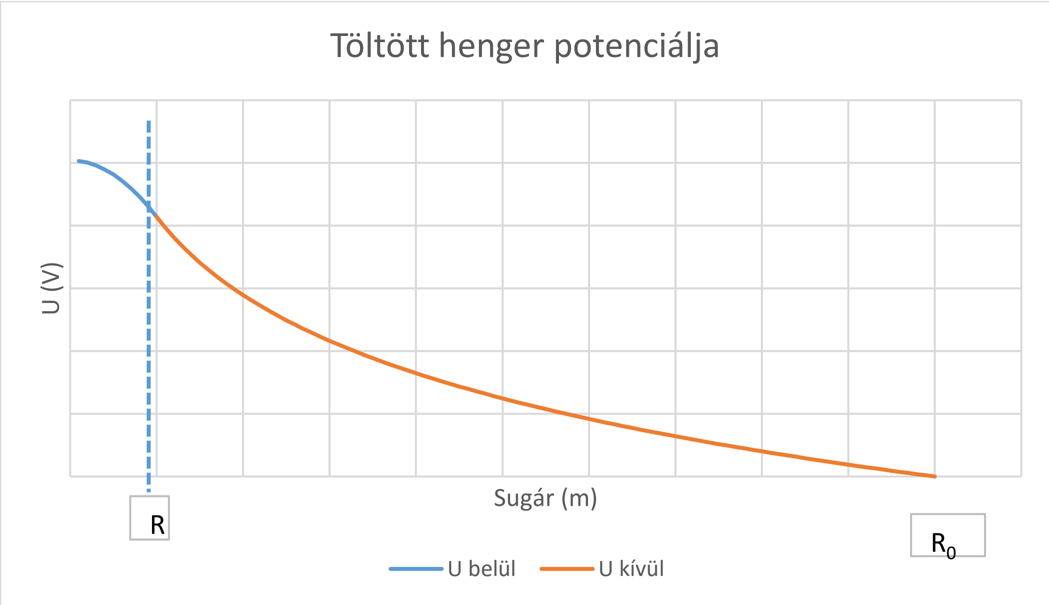
Ha $r = R$, akkor:

$$E_{kívül} = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{R} = 2 \cdot k \cdot \frac{Q/h}{R} = \frac{2kQ}{hR}$$

$$E_{belül} = \frac{\rho}{2\varepsilon} \cdot r = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{Q}{R^2 \pi h} \cdot R = \frac{1}{R} \cdot \frac{Q}{2\pi h \varepsilon} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2Q}{4\pi h \varepsilon} = \frac{2kQ}{hR}$$

Mivel a két különböző elektromos térerősségre ugyanazt az eredmény kaptuk így a két függvény folytonos.

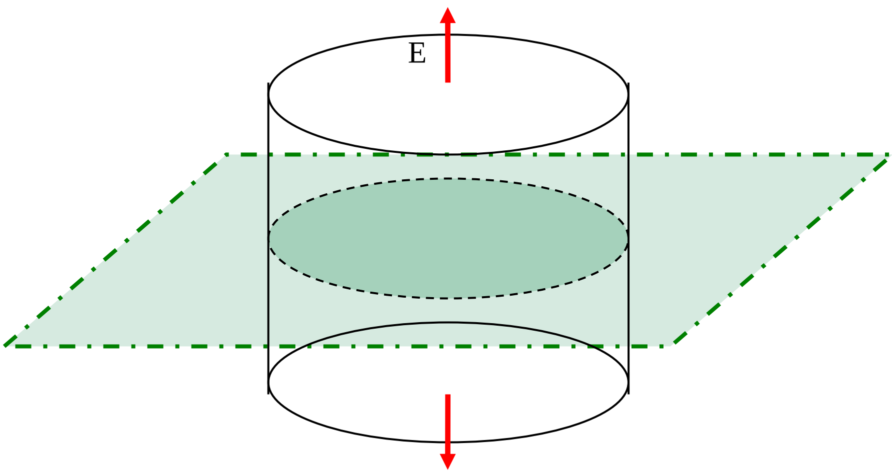




Példa: Egyenletesen töltött síklemez elektromos tere

Határozzuk meg az η felületi töltéssűrűségű végtelen, az *x-y* síkban elhelyezkedő sík lemez által keltett elektromos térerősséget és potenciált!

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el. Most egy olyan zárt felületet veszünk fel, amelynek alapja tetszőleges alakú (legyen pl. kör, így a felület körhenger lesz), de a síkkal párhuzamos, az alap és a fedőlap ugyanolyan távol van a síktól annak két oldalán, a hengerpalást pedig merőleges a síkra. A térerősségnek szimmetria-okokból nem lehet x vagy y komponense, hanem a z (vagy -z) irányba mutat.



Amikor a térerősség felületi integrálját számoljuk a palástra, a felület normálisa merőleges $\vec{E}$-re, tehát a palást nem ad járulékot az integrálba. A henger vízszintes lapjain pedig $\vec{E}$ konstans, tehát kiemelhető az integrálás elé:

$$\oint \vec{D}d\vec{A} = \varepsilon\left(\int_{alap} EdA + \int_{fedő} EdA\right) = \varepsilon E\left(\int_{alap} dA + \int_{fedő} dA\right) = 2\varepsilon EA = Q = \eta A\,,$$

vagyis

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon}\,.$$

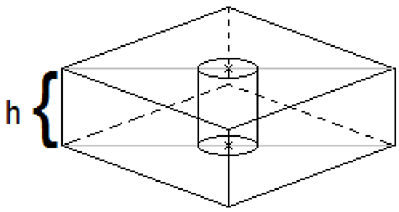
Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a térerősség nem függ a lemeztől mért távolságtól. Ez persze csak addig igaz, ameddig jó közelítés az, hogy végtelen a síklap, azaz sokkal közelebb van a vizsgált pont a síklaphoz, mint annak átmérője.

A potenciálhoz a kapott konstans térerősség-függvényt kell integrálni z irányú görbe mentén, ami most egyszerű szorzást jelent. Célszerű a nulla szintet a töltött síknak választani. Világos, hogy akár z, akár -z irányban haladunk, ugyanakkora munkát kell végezni, tehát z-nak csak az abszolút értéke számít. Mivel pozitív a próbatöltés, a pozitív lemez taszítja őt, vagyis a lemez magas potenciálon van a tér többi pontjához képest. Ezen megfontolások alapján a potenciál:

$$U = -\frac{\eta}{2\varepsilon_o}\cdot|z|$$

Vastag, végtelen síklemez belseje

A sík belsejében szimmetrikusan vesszük fel a kis hengert.

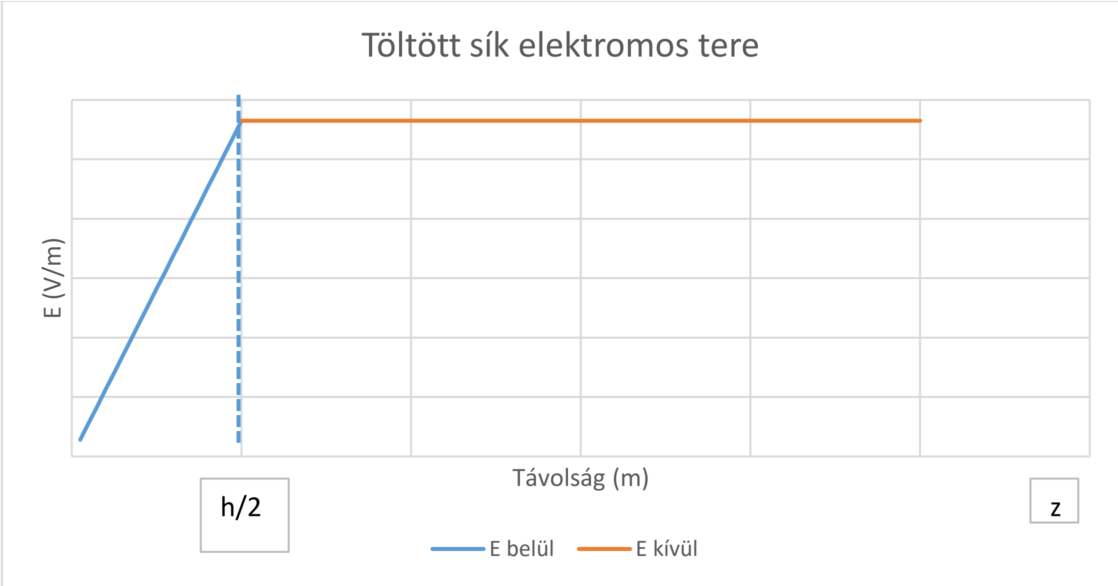


Az előző eljárást ismételve kapjuk, hogy

$$2DA = Q = \rho V = \rho 2Az.$$

Leegyszerűsítve 2A-val $D = \rho z$ adódik, ebből pedig a térerősség már könnyen számolható:

$$E = \frac{\rho}{\varepsilon} z$$



Ha be akarjuk látni, hogy folytonos a térerősség a z=h/2 síkban, meg kell adnunk az eddigi $\eta = \frac{Q}{A}$ felületi töltéssűrűség és a térfogati töltéssűrűség viszonyát. Ehhez kihasználjuk, hogy V=Ah.

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{\eta}{h}\,.$$

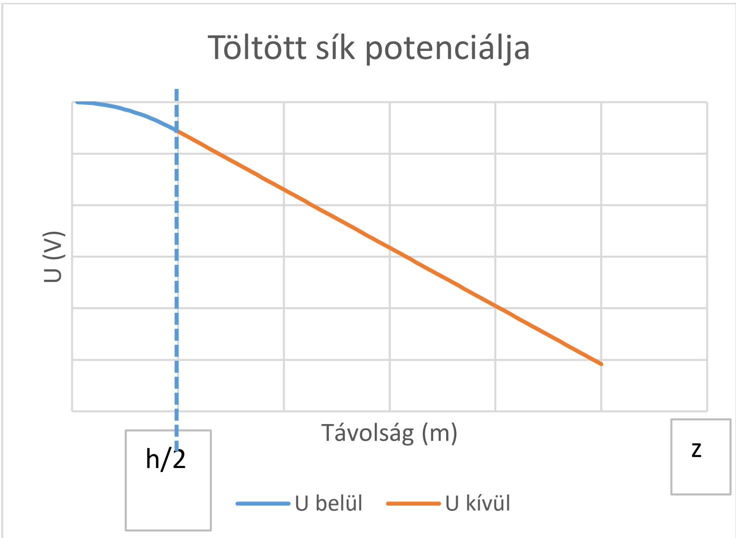
Ebből behelyettesítéssel kapjuk a folytonosságot.

Potenciál:

kívül: $U = \frac{\eta}{2\varepsilon}|z|$, a térerősség és a potenciál a lemez közepében lévő síkban 0

Potenciál a síklemezen belül:

$$U_{z\to 0} = \int_z^0 E dz = \int_z^0 \frac{\rho}{\varepsilon} z\, dz = \frac{\rho}{\varepsilon}\int_z^0 z\, dz = \frac{\rho}{\varepsilon}\left[\frac{z^2}{2}\right]_z^0 = \frac{\rho}{\varepsilon}\left(0 - \frac{z^2}{2}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{z^2}{2} = -\frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot z^2$$



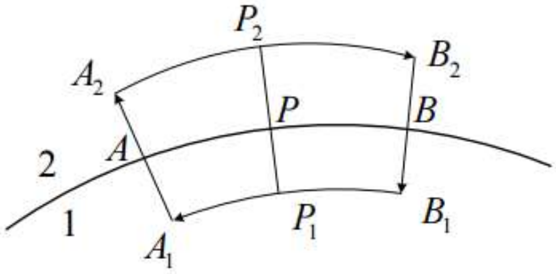
Térmennyiségek viselkedése két közeg határán

Határfeltételi egyenletek (peremfeltételek).

Tekintsük két különböző közeg határfelületét. Vegyünk fel a két közeg határfelületén egy irányított görbeívet (AB), illetve egy zárt görbét.

Alkalmazzuk a második Maxwell-egyenletet erre a görbére: $\oint_g \vec{E}\overrightarrow{dr} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}\overrightarrow{dA}$, azaz

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} + \int_{A_2}^{B_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} + \int_{B_2}^{B_1} \vec{E}\overrightarrow{dr} + \int_{B_1}^{A_1} \vec{E}\overrightarrow{dr} = -\frac{d}{dt}\int_F \overrightarrow{BdA}$$



Közelítsük a P_1 és P_2 pontokat a P-hez, azaz húzzuk rá az $\widehat{A_1B_1}$ és $\widehat{A_2B_2}$ íveket az $\widehat{AB}$ ívre, ekkor $\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} \rightarrow 0$, és $\int_{B_2}^{B_1} \vec{E}\overrightarrow{dr} \rightarrow 0$, mivel a tartományok 0-hoz tartanak. A hurok által közbezárt felület a nullához tart, a B viszont véges, tehát a jobb oldal eltűnik. Mindebből az következik, hogy határértékben csak két integrál marad az egyenletünkből, és ezek az AB szakaszon vett integrálokhoz tartanak. Jelöljük E_1 és E_2 -vel a térerősséget a határ mentén, az 1-es és a 2-es közegben. Ezzel: $\int_{A_2}^{B_2} \overrightarrow{E_2dr} \rightarrow \int_{A}^{B} \overrightarrow{E_2dr}$,

A 1-es közegben az integrálás határait megcserélve előjelváltás történik:

$\int_{B_1}^{A_1} \vec{E}\overrightarrow{dr} \rightarrow \int_{B}^{A} \overrightarrow{E_1dr} = -\int_{A}^{B} \overrightarrow{E_1dr}$, így a két integrált összevonva:

$$\int_{A}^{B} (\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1})\overrightarrow{dr} = 0$$

Ha most a B ponttal tartunk A-hoz, a térerősségek változása az AB görbe mentén elhanyagolhatóvá válik, vagyis az $E_2 - E_1$ –et kiemelhetjük az integrálás elé, majd a görbe hosszával egyszerűsíthetünk. A végeredmény:

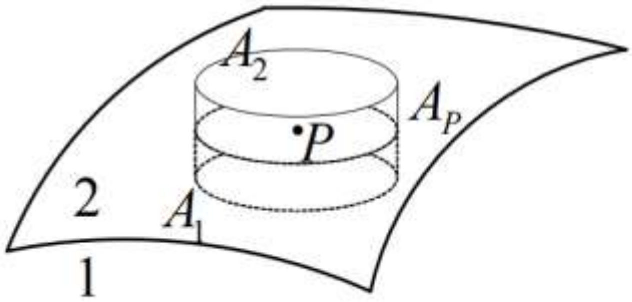
$$E_{t2} = E_{t1}$$

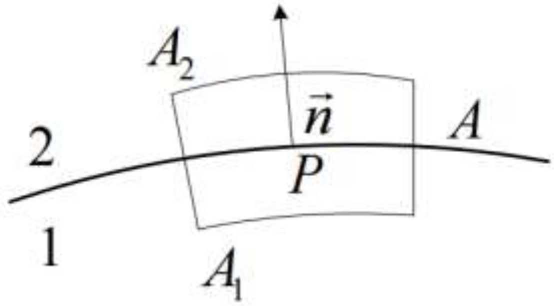
Az elektromos térerősség érintő irányú összetevője a közeghatáron folytonos.

Ebből az is következik, hogy a D tangenciális komponense általában **nem** folytonos, hiszen pl. $E_{t1} = \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1}$, ezt behelyettesítve:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{D_{t1}}$$

A **normális** komponensek levezetéséhez vegyünk fel a két közeg határfelületén egy zárt felületet, és minden pontjában a felületi normálist. A keletkező palástfelületet határoljuk le A_2 -vel és A_1 -el a két közegben. A nyert zárt felületre alkalmazzuk a Gauss törvényt: $\oint_F \overrightarrow{DdA} = Q$





$$\int_{A_1} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} + \int_{A_p} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} + \int_{A_2} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} = \int_V \rho\, dV + \int_A \eta dA$$

itt $\eta = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ a felületi töltéssűrűség. Közelítsük az A_1 és A_2 felületeket az A-ra, ekkor a

palástfelület és a térfogat nullához tart, így két integrál a 0-hoz tart:

$$\int_{Ap} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} \to 0 \text{ és } \int_V \rho dV \to 0$$

Ugyanakkor pedig, $\int_{A_1} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} \to \int_A \overrightarrow{D_1}\,\overrightarrow{dA}$ ahol $\overrightarrow{D_1}$ az indukció a határon, de még az 1-es közegben, és $\int_{A_2} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} \to \int_A \overrightarrow{D_2}\,\overrightarrow{dA}$, ahol $\overrightarrow{D_2}$ az indukció a határon, de még az 2-es közegben.

$$\int_A D_{n1} dA + \int_A D_{n2}\, dA = \int_A \eta dA$$

$$\int_A (D_{n2} - D_{n1} - \eta)\, dA = 0.$$

mivel ez bármely A-ra igaz,

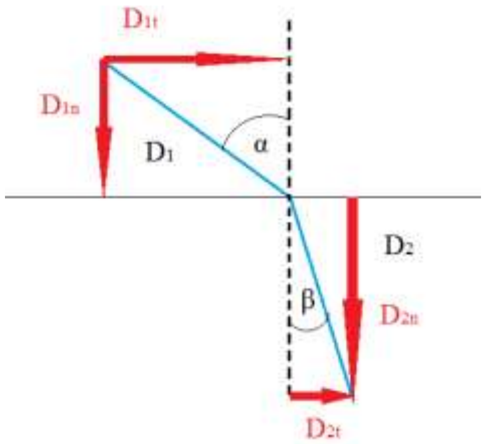
$$D_{n2} - D_{n1} = \eta$$

Tehát az elektromos indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen akkor szenved ugrást, ha van felületi töltéssűrűség.

Tegyük fel, hogy nincs felületi töltéssűrűség η = 0, ekkor $D_{1n} = D_{2n}$. Az elektromos térerősség normális komponense viszont ekkor sem folytonos, mivel $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$, vagyis

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{E_{n1}}{E_{n2}}$$

Térerősség- és indukcióvonalak törési törvénye:



$$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta} = \frac{\frac{D_{1t}}{D_{1n}}}{\frac{D_{2t}}{D_{2n}}} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

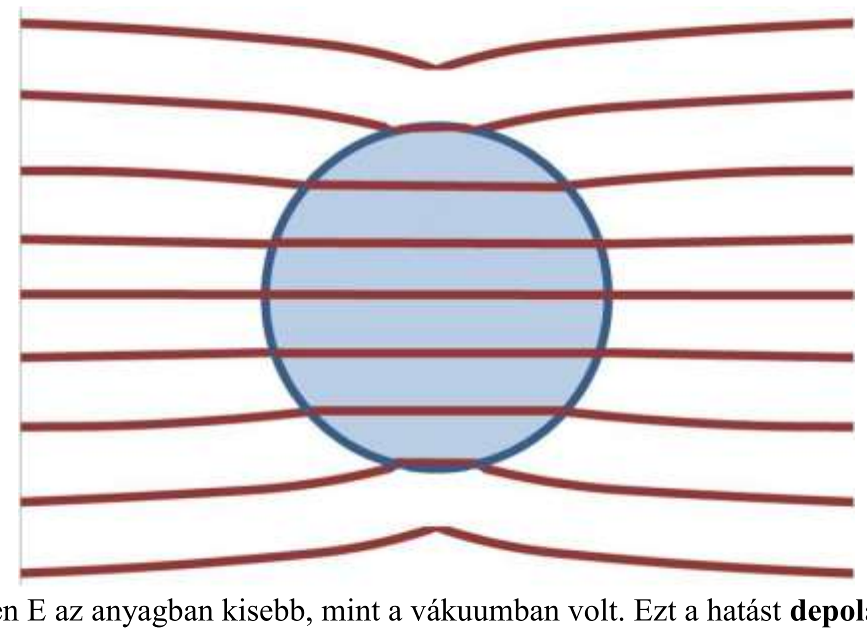
A térerősséget vizsgálva, felhasználva, hogy $E_{t2} = E_{t1}$:

$$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta} = \frac{\frac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Eredményünk szerint az E és a D vonalak ugyanúgy törnek a közeghatárokon.

Dielektrikum külső térben

Tegyük fel, hogy vákuumban lévő homogén elektromos térbe egy darab dielektrikumot teszünk. Kimutatható, hogy az E térerősség a testben csak akkor lesz homogén és egyirányú az eredeti térerősséggel, ha a test alakja ellipszoid, amelynek egyik főtengelye a külső térrel párhuzamos. Ezért csak ezt az egyszerű esetet vizsgáljuk. Feltesszük, hogy a testen nincs valódi többlettöltés ($\rho = 0,\ \eta = 0$), vagyis a D vonalaknak nincs forrásuk, a D vonalak folytonosak, D_n-nek nem lehet ugrása. Polarizált töltés viszont van, tehát E_n nem folytonos a felületen. Ebből az következik, hogy a külső térre merőleges felületek két oldalán D megegyezik, E viszont belül kisebb.
Ha a külső térrel párhuzamos oldalt vizsgáljuk, ott a tangenciális komponensekre vonatkozó egyenleteket használhatjuk: E_t nem ugrik, vagyis a testen kívül megritkultak az E vonalak.

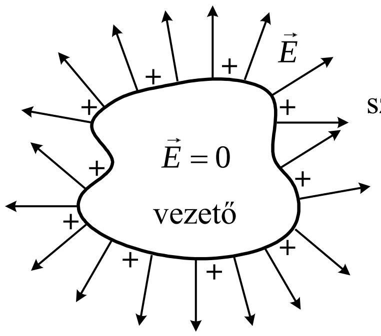


Végeredményben E az anyagban kisebb, mint a vákuumban volt. Ezt a hatást **depolarizáció**nak nevezzük. D viszont besűrűsödik a dielektrikumban, az „magába vonzza” a D vonalakat, ahogy az ábrán is láthatjuk. A leírtak általánosíthatók arra az esetre, ha nem vákuumban, hanem egy másik anyagi minőségű szigetelőben van a dielektrikum ellipszoid.

Vezetők az elektrosztatikus mezőben

Ha egy vezetőben elektromos tér van jelen, az a szabad töltéshordozókat rendezett mozgásra készteti, elektromos áram jön létre. Sztatikus állapot akkor állhat be, ha a vezetőben nincs elektromos mező és a térerősség nulla, mert ellenkező esetben a vezetési elektronok rendezetten mozognának. Tehát a vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E} = 0$. Ezt azt is jelenti, hogy sztatikus esetben a vezető bármely két pontja között a potenciálkülönbség nulla, az egész vezető ugyanazon a potenciálon van, idegen szóval ekvipotenciális tartomány.
Ez az állítás akkor is igaz, ha a vezető belsejében üregek vannak, feltéve, hogy az üreg belsejében nincsenek elszigetelt töltések. Azt a tényt, hogy zárt fémburkolattal (vagy sűrű szövésű fémhálóval – úgynevezett Faraday-kalitkával) körülvett térrészbe az elektromos erőtér nem hatolhat be, felhasználják arra, hogy érzékeny elektromos berendezéseket a külső, zavaró elektromos hatásoktól, pl. villámcsapástól megvédjenek. Az eljárás neve elektrosztatikai árnyékolás.

Ha $\vec{E} = 0$, akkor térerősség tangenciális komponense is nulla. Mivel $\vec{E}$ tangenciális összetevője nem ugrik két közeg határfelületén, a vezetőt határoló szigetelőanyagban a felület mentén az elektromos térerősségnek tangenciális összetevője nincs, vagyis a vezető körül a szigetelőben a térerősség mindenütt merőleges a vezető felületére.



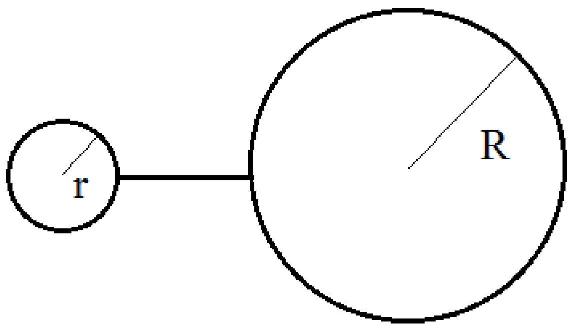
Elektromos térerősség a vezetőben, és a környező szigetelőben, sztatikus állapotban

Tekintve, hogy a vezetőben a térerősség nulla $\vec{E} = 0$, így az elektromos indukció is nulla $\vec{D} = 0$. Ebből az is következik, hogy a vezető belsejében, sztatikus esetben térfogati többlettöltés nem lehet, vagyis $\rho = 0$. Ez az állítás az elektrosztatika második alaptörvényéből következik. A vezetőre vitt töltés a vezető külső felületére húzódik. A határfeltételi egyenlet szerint $D_{n2} - D_{n1} = \eta$, de a vezetőben az indukció nulla $D_{n1} = 0$, így

$$D_{n2} = \eta \, .$$

Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a vezető mentén, de már a szigetelőben az elektromos indukció értéke éppen a vezető felületi töltéssűrűségével egyezik meg.

A csúcshatás



Elektrosztatikus esetben tetszőleges alakú és kiterjedésű fémdarab ekvipotenciális tartomány. Ha két különböző méretű töltött fémgömböt összekötünk, akkor olyan egyensúlyi helyzet áll be, amelyben a két gömb potenciálja megegyezik. Jelöljük a kisebb (1-es) és a nagyobb (2-es) gömb felületén a töltéssűrűséget a következőképpen:

$$\eta_1 = \frac{Q_1}{A_1} \qquad \eta_2 = \frac{Q_2}{A_2}$$

A két gömbszimmetrikus test potenciálja:

$$k \cdot \frac{Q_1}{r} \qquad k \cdot \frac{Q_2}{R}$$

Megjegyezzük, hogy az összekötés miatt a gömbszimmetria kismértékben sérül, ezt most elhanyagoljuk. A két potenciált egyenlővé téve és egyszerűsítve k-val:

$$\frac{\eta_1 A_1}{r} = \frac{\eta_2 A_2}{R}$$

$$\frac{\eta_1 4\pi r^2}{r} = \frac{\eta_2 4\pi R^2}{R}$$

egyszerűsítve az egyenletet 4π-vel, a törteket a sugarakkal, majd átrendezve a következő adódik:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{R}{r}$$

Azaz a gömbök sugarával (közelítőleg) fordítottan arányos a töltéssűrűség. Ebből következtethetünk arra, hogy általában is igaz, hogy egy feltöltött fémtesten a töltés nem egyenletesen oszlik el. A csúcsokon nagyobb a töltéssűrűség és így a közelükben a térerősség, mint a kisebb görbületű helyeken. Egzaktul érvényes analitikus formula azonban nem létezik a töltéssűrűség és a görbület általános kapcsolatára.

A kapacitás fogalma

Mint már említettük, a vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E} = 0$, a vezető ekvipotenciális tartomány. Kérdés, hogyan függ egy magányos vezető potenciálja a rá felhordott töltéstől. A szuperpozíció elve miatt, ha a vezető töltését megkétszerezzük, akkor a tér minden pontjában az $\vec{E}$ elektromos térerősség is a kétszeresére nő. Ennek megfelelően a vezető potenciálja is a duplájára nő. Tehát a vezető potenciálja egyenesen arányos a vezetőre vitt töltéssel, így a hányadosuk állandó. Ezt a hányadost C-vel jelöljük és a vezető kapacitásának nevezzük. Definíció:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

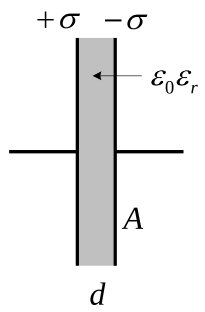
Számoljuk ki egy magányos *R* sugarú vezető gömb kapacitását (a végtelen távoli pontokat választva nulla potenciálúnak)! Felhasználjuk azt a korábban bizonyított állítást, hogy egy töltött gömb potenciálja a gömb felületén és a gömbön kívül ugyanannyi, mintha a töltés a gömb középpontjában lenne: $U(R) = k\frac{Q}{R}$, így a kapacitása:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{k\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Ha felhasználjuk a Coulomb állandó értékét, akkor beláthatjuk, hogy a hétköznapi méretű testek vákuumbeli kapacitása igen kicsi: A kapacitás megnövelésének egyik lehetséges módja az, hogy a feltöltött vezető közelébe egy másik földelt vezetőt helyezünk. Ilyenkor a potenciál lecsökken, a kapacitás pedig nő. A **kondenzátor** két vezető test (az armatúrák vagy fegyverzetek) amelyek dielektrikummal vannak elszigetelve egymástól. A pozitív fegyverzetről induló indukcióvonalak a negatív fegyverzeten végződnek, a két fegyverzet töltése ellentetten egyenlő. Az elrendezés kapacitását a pozitív fegyverzet töltésének és a két fegyverzet közötti potenciálkülönbségnek a hányadosaként értelmezzük: C=Q/U.

Síkkondenzátor kapacitása

Jelölje *d* a síkkondenzátor fegyverzetei között lévő távolságot! Legyen d jóval kisebb, mint a lemezek bármely lineáris mérete!



A síkkondenzátor

A két fegyverzet között az elektromos indukció $D=\sigma$, ebből $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$. A potenciálkülönbség a fegyverzetek között $U=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d$, ebből:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}\ .$$

Az elektrosztatikus mező energiája

Tekintsünk egy kondenzátort, melynek kapacitása *C*. Töltsük fel 0-ról *Q*-ra. Egy közbülső állapotban jelölje a pillanatnyi állapot töltését *q* és a fegyverzetek közötti feszültséget *u*. Egy kicsiny Δq töltést szállítsunk át az egyik lemezről a másikra. Mivel az egységnyi töltésen végzett munka a feszültség, így a végzett munka $\Delta W=u\Delta q$. Mivel $C=\dfrac{q}{u}$, így a végzett munka miközben a kicsiny Δq töltést átszállítjuk: $\Delta W=\dfrac{q}{C}\Delta q$. Az összes végzett munka a kondenzátor teljes feltöltése során:

$$W=\frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq=\frac{Q^2}{2C}$$

így *a kondenzátor energiája*:

$$W=\frac{Q^2}{2C}$$

A kapacitás definíciójának felhasználásával ez átírható más alakokba is: $W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2$. Mivel úgy tekintjük, hogy ezt az energiát a lemezek közti elektromos tér hordozza, felmerül a kérdés, hogy mennyi energia van a mező egységnyi térfogatában. Tekintsünk egy síkkondenzátort, a kondenzátor belsejében a szélektől eltekintve a mező homogénnek tekinthető.

$$W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}\sigma A\cdot Ed=\frac{1}{2}DE\cdot Ad=\frac{1}{2}DE\cdot V\ ,$$

Ahol felhasználtuk a következő, korábban említett összefüggéseket: $\sigma=\dfrac{Q}{A}$, $D=\sigma$, $V=Ad$, és $E=\dfrac{U}{d}$. Az *elektromos mező energiasűrűsége* megmutatja, mennyi energia van egységnyi térfogatban: $w = \frac{W}{V}$, a mértékegység nyilván J/m^3. A fenti levezetés szerint az elektromos mező energiasűrűsége:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}}$$

Ez a kifejezés nem csak sztatikus esetben igaz. Ha a tér egy tetszőleges pontjában az elektromos térerősség $\vec{E}$ és az indukcióvektor $\vec{D}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\Delta V$ elektromos energia található. Egy véges *V* térfogatban pedig

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E} dV .$$

Megjegyzés: a síkkondenzátor energiáját egy másik, (szintén tanulságos) módon is ki lehet számolni. Ha az egyik (pl. baloldali) fegyverzet által a másikra (pl. a jobboldalira) kifejtett erőt az F=QE definíció és az $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ képletből automatikusan kiszámoljuk, a valóságosnál kétszer nagyobb erőt kapunk (mivel a térerősséget felerészben a baloldali, felerészben pedig a jobboldali lemez kelti, utóbbi pedig nem fejthet ki erőt önmagára). Így azt kapjuk, hogy

$$F = \frac{QE}{2} = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A},$$

vagyis az erő független a lemezek *d* távolságától (persze csak ameddig a közelítéseink – pl. hogy a térerősség homogén - érvényesek). Ha *d=0*, akkor a kondenzátornak nincs (elektrosztatikus) energiája. Kezdjük el most távolítani a lemezeket, miközben a töltés maradjon állandó. Ha a lemezek közötti távolság éppen *d*, a távolító erő $W = Fd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}$ munkát végzett, ennyi energia halmozódott fel a kondenzátorban.

Elektromos áramerősség

A vizsgált felület teljes keresztmetszetén időegység (másodperc) alatt átáramló (nettó) töltésmennyiséget áramerősségnek nevezzük. Jele I, mértékegysége az amper (A) (= C/s).

Ennek megfelelően a töltés mértékegységének időnként az amperórát vagy ampermásodpercet használják. Az elektromos áram (hagyományos értelemben vett) iránya a negatív töltések áramlási sebességével ellentétes, a pozitív töltések elképzelt áramlásának irányával megegyező. A t_1, t_2 időközben az *A* felületen átáramló töltést úgy kaphatjuk meg, hogy az áramerősséget idő szerint integráljuk:

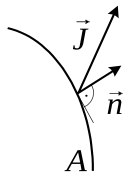
$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

Elektromos áramsűrűség

Az elektromos áramsűrűség-vektor abszolút értéke az áramlási irányra merőleges **egységnyi keresztmetszeten** időegység alatt átáramló töltéssel egyezik meg. Iránya megegyezik a pozitív töltéshordozók áramlási irányával, nagyságát határértékképzéssel számolhatjuk ki:

$$j = \lim_{A \to 0} \frac{I}{A},$$

ahol I az A felületen átfolyó áram. Mértékegysége az $A/m^2 = C/(sm^2)$. Az elektromos áramsűrűség irányított felületre vonatkozó lokális vektormennyiség. Ha elektronok áramlanak a felületi normális irányában, akkor az áramsűrűség-vektor a normálissal ellentétes irányba mutat.



Az áramsűrűség vektor és a felület normálvektora

Az A felületen átfolyó áramerősség tehát:

$$I = \int_A \vec{j}d\vec{A},$$

de hogyha a $\vec{j}$ a felület minden pontjában ugyanakkora és merőleges a felületre, akkor egyszerűen I=jA.

A differenciális Ohm-törvény

Az ellenállás függése a geometriai méretektől

Tekintsünk egy vékony, állandó A keresztmetszetű ℓ hosszúságú vezetőt. Ha a vezető hosszát kétszeresére növeljük, akkor az ekvivalens azzal, mint ha az eredeti vezetőből két ugyanolyat sorosan kapcsolnánk, tehát az ellenállás kétszeresére növekszik. Ez azt jelenti, hogy a vezető ellenállása egyenesen arányos a hosszával. Ha a keresztmetszetet növeljük kétszeresére, az ekvivalens azzal, mint ha két ugyanolyan vezetőt párhuzamosan kapcsolnánk, vagyis az ellenállás felére csökken. Tehát az ellenállás fordítottan arányos a keresztmetszettel:

$$\boxed{R = \rho \frac{\ell}{A}}$$

Az arányossági tényezőt **fajlagos ellenállás**nak nevezzük, jele ρ, mértékegysége Ωm vagy $\frac{\Omega mm^2}{m}$.

Megjegyezzük, hogy a fajlagos ellenállás a különböző anyagokra rendkívül nagymértékben különböző. A jó vezető szobahőmérsékletű rézre pl. $1{,}72 \cdot 10^{-8}\Omega m = 0{,}0172\ \Omega mm^2/m$. Ez az előzőek szerint azt jelenti, hogy egy 1m hosszú, $1mm^2$ keresztmetszetű rézdrót ellenállása mintegy 0,017Ω), ezért hanyagoljuk el sok feladatban a vezetékek ellenállását. A szigetelők (pl. műanyagok) fajlagos ellenállása ugyanakkor akár 10^{15}-10^{20} Ωm is lehet.

Az Ohm törvény differenciális alakja

Vékony vonalas vezető esetén a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest, vagyis úgy tekintjük, hogy az áramsűrűség egy adott keresztmetszet minden pontjában ugyanakkora és a vezető hossztengelyének irányába mutat. A vezető két sarka között a feszültség: $U = E\ell$, a rajta átfolyó áramerősséget az áramsűrűség-vektorból kapjuk:

$$I = \int_A \vec{j}d\vec{A} = j\,A$$

Így a vezető ellenállása $R = \frac{U}{I} = \frac{E\ell}{jA}$, másfelől tudjuk, hogy $R = \rho\frac{\ell}{A}$, a két egyenletet összehasonlítva kapjuk, hogy $\rho = \frac{E}{j}$, azaz $E = \rho j$. Ez általánosan is igaz $\rho\vec{j} = \vec{E}$ és differenciális Ohm-törvénynek nevezik.
Vezessük be a **fajlagos vezetőképességet**, amelynek jele a σ ('szigma'), de gyakran a γ-t használják. Ezt a fajlagos ellenállás reciprokaként értelmezzük: $\rho = \frac{1}{\sigma}$. Ezzel a jelöléssel a **differenciális Ohm-törvény** vagy Ohm féle anyagi egyenlet:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$

Az Ohm-törvény állítása, hogy $\vec{j}$ *és* $\vec{E}$ egyenesen arányos, csak egy közelítés, érvényességi köre korlátozott és függ a körülményektől. Például fémekben, ha nő a $\vec{j}$ áramsűrűség, akkor a hőmérséklet is növekszik és σ lecsökken, vagyis σ csak akkor lehet független $\vec{j}$-től, ha T=állandó. Néhány anyagra, ill. eszközre azonban még állandó hőmérsékleten sem teljesül az arányosság, pl. félvezető diódák. Emellett bizonyos anyagok vezetőképessége hűtéskor egy meghatározott hőmérsékleten végtelenné válik, a jelenséget szupravezetésnek nevezzük. Szupravezető állapotban a fajlagos ellenállás eltűnik, $\rho = \frac{1}{\sigma} = 0$. Ilyenkor térerősség nélkül is folyhat áram. Mindezek ellenére az Ohm-törvény az elektromosságtan egyik legfontosabb összefüggése.

Példa: potenciál és térerősség-viszonyok.

Két különböző anyagból készült rudat a végeiknél összenyomunk és elhanyagolható belső ellenállású $\varepsilon = 3\mathrm{V}$-os feszültségforrásra kapcsolunk. Tegyük fel, hogy az első rúd egy vas-ötvözetből van, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_1 = 10^{-7}\Omega\mathrm{m}$, a második egy olyan aranyalapú ötvözetből, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_2 = 5\cdot10^{-8}\Omega\mathrm{m}$, tehát fele akkora. A két rúd egyébként teljesen azonos, hosszuk egyenként d=1m, keresztmetszetük $A = 1\mathrm{cm}^2$. Azt vizsgáljuk, hogy mekkora a rajtuk áthaladó áramerősség, mekkora az áramsűrűség, az elektromos térerősség és hogyan változik a potenciál a rudak mentén.
Számoljuk ki először a rudak ellenállását:

$$R_1 = \rho_1\frac{\ell}{A} = 10^{-7}\Omega m\cdot\frac{1m}{10^{-4}m^2} = 0,001\Omega,$$

hasonlóan, $R_2 = 0,0005\Omega$. Az eredő ellenállás, mivel sorosan vannak kapcsolva,

$$R = R_1 + R_2 = 0,0015\Omega.$$

Ebből az áramerősség:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{3\mathrm{V}}{0,0015\Omega} = 2000\mathrm{A},$$

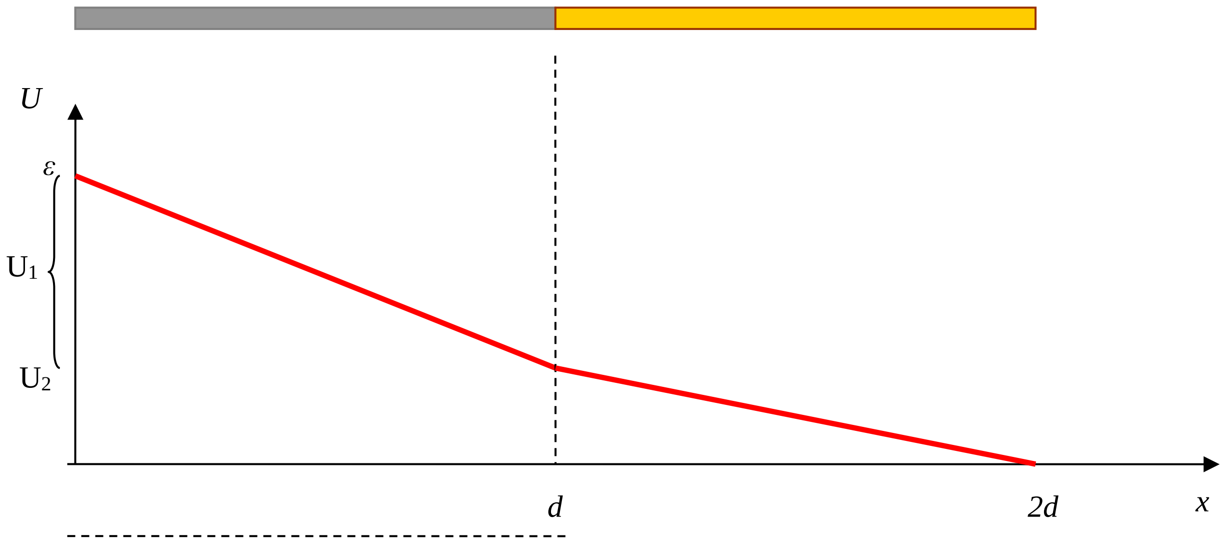
ami egy igen nagy szám. Megjegyezzük, hogy ez az eset gyakorlatilag annak felel meg, hogy rövidre zárjuk az áramkört, ekkor igen rossz közelítés, hogy az áramforrás belső ellenállását elhanyagolhatónak vesszük, de most maradjunk mégis ennél.
Az áramsűrűség mindkét rúdban

$$j = \frac{I}{A} = \frac{2000\mathrm{A}}{10^{-4}\mathrm{m}^2} = 2\cdot10^7\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

A térerősséget kiszámolhatjuk ebből a differenciális Ohm-törvényt felhasználva. Az első rúdban:

A másodikban hasonlóan $E_2 = \rho_2 j = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. A kétszer jobb vezetőben tehát feleakkora térerősség szükséges ugyanakkora áramsűrűség létrehozásához.

Az első rúdra eső feszültség $U_1 = E_1 d = 2V$, a másodikra $U_2 = E_2 d = 1V$, azzal az ismert ténnyel összhangban, hogy soros kapcsolásnál nagyobb ellenállásra arányosan kisebb feszültség jut. Ábrázoljuk a potenciál-viszonyokat a rudakban.



Látható, hogy az első rúdban nagyobb a térerősség, tehát egységnyi hosszra nagyobb potenciálesés jut, meredekebb ott az egyenes.

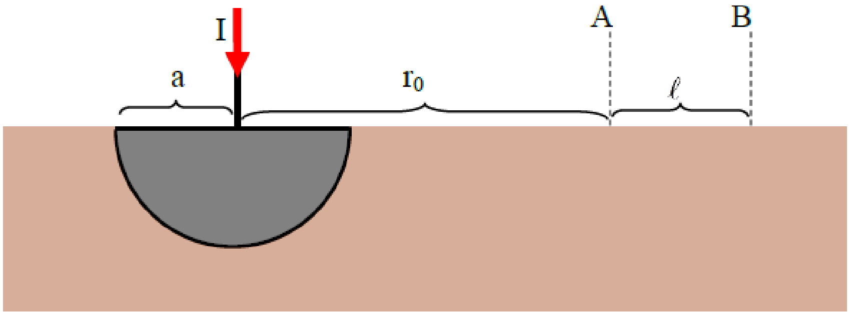
Feladat

Az ábra szerinti félgömb alakú, ideális vezetőnek tekinthető földelőbe I = 10 kA erősségű áram folyik be. A föld fajlagos vezetőképessége, σ=0,01/(Ωm), a = 10 cm, r_0= 10 m és *l* = 75 cm.

a) Milyen potenciálon van a földelő?

b) Mekkora az elrendezés ellenállása?

c) Számítsuk ki az A, B pontok közötti feszültséget (lépésfeszültség).



$$R = \int_a^\infty \frac{\rho dl}{A} = \rho \int_a^\infty \frac{1}{2\pi r^2} dr = \frac{1}{\sigma 2\pi}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^\infty = \frac{1}{2\pi\sigma a} = \frac{100}{2\pi \cdot 0{,}1} = 159{,}15\Omega$$

$$U_{AB} = \frac{1}{\sigma 2\pi}\int_{r_0}^{r_0+l} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\sigma 2\pi}\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_0}^{r_0+l} = \frac{1}{\sigma 2\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l}\right) = 1110{,}38V$$

Kirchhoff csomóponti törvény levezetése

1. Maxwell:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad /div$$

$$\underbrace{div\, rot\vec{H}}_{0} = div\vec{j} + div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

3.Maxwell:

$$div\,\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{div\vec{D}}_{\rho}$$

$$div\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad / \int dV$$

$$\int_V div\,\vec{j}\,dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

A Gauss-Osztrogradszkij tételt felhasználva:

$$\oint_F \vec{j}dA = -\frac{d}{dt}\int \rho dV$$

Ami azt fejezi ki, hogy egy térrészben a töltés nettó mennyisége csak úgy tud megváltozni, ha a térrész határán a töltés átáramlik. Ez a kontinuitási egyenlet.

Stacionárius esetben időben minden állandó, $\frac{d}{dt} \equiv 0$. tehát a jobb oldal nulla.

$\oint_F \vec{j}dA \rightarrow \sum I = 0$, azaz a Kirchoff csomóponti törvény.

Viselkedés közeghatáron (folyt.)

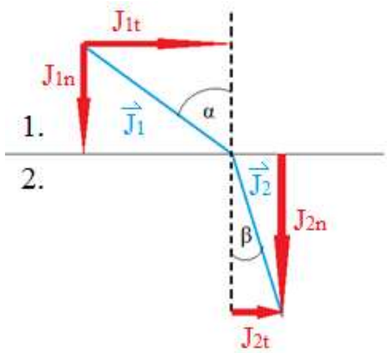
Az áram stacionárius esetben, ha egyszer elér egy felületet, akkor át is préselődik rajta.

$$\oint_f \vec{j}\overrightarrow{dA} = j_{2,n} \cdot A - j_{1,n} \cdot A = 0$$

$$j_{1,n} = j_{2,n}$$

Áramvonalak törési törvénye:

Az E térerősség- és D indukcióvonalak törési törvényéhez teljesen hasonlóan kapható. Korábban levezetésre került, hogy a térerősség tangenciális komponense a 2 rétegben megegyezik, azaz $E_{1t} = E_{2t}$. Ebbe a differenciális Ohm-törvényt



$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

helyettesítve kapjuk a tangenciális komponensek közti összefüggést:

$$\frac{j_{1t}}{\sigma_1} = \frac{j_{2t}}{\sigma_2}$$

$$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta} = \frac{\frac{j_{1t}}{j_{1n}}}{\frac{j_{2t}}{j_{2n}}} = \frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Az ellenállás és a kapacitás közti kapcsolat

Látjuk, hogy nagyon hasonló összefüggések vonatkoznak a dielektrikumok sztatikus terére és a vezetőkben kialakuló áramsűrűség-térre.

Ha egy egyenes vezető ellenállására kapott $R = \rho\frac{\ell}{A}$ képletet felhasználva felírjuk az ellenállás reciprokát, a G konduktanciát, a $G = \frac{1}{R} = \sigma\frac{A}{\ell}$ formulát kapjuk, ami nagyon hasonlít a síkkondenzátor $C = \varepsilon\frac{A}{d}$ kapacitására. Hogy a hasonlóságot megértsük, tekintsünk egy tetszőleges alakú kondenzátort, amely belsejében homogén dielektrikum van, melynek permittivitása ε. Rögzített U feszültségre kapcsolva a kondenzátor belsejében kialakul a térerősség-vonalaknak egy egymást nem metsző rendszere. Ha most a dielektrikum vezetőképességét elkezdjük nullától fokozatosan növelni úgy, hogy U állandó, az erővonal-rendszer nem változik (legalábbis nem hirtelen), a töltések pedig ezen erővonalak mentén áramlanak.

$$\frac{1}{R} = G = \frac{I}{U} = \frac{1}{U}\oint_f \vec{j}d\vec{A} = \frac{\sigma}{U}\oint_f \vec{E}d\vec{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon U}\oint_f \vec{D}d\vec{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{Q}{U} = \frac{\sigma}{\varepsilon}C$$

ahol a zárt felület az egyik lemezt veszi körbe olyan – egyébként tetszőleges – módon, hogy a másik lemezhez sem ér hozzá. Q pedig az össztöltés a felülettel körbevett lemezen. Tehát

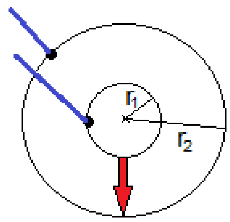
$$\frac{G}{\sigma} = \frac{C}{\varepsilon}$$

vagyis az anyag tulajdonságait képviselő fajlagos vezetőképességgel, ill. permittivitással leosztva a konduktanciát, ill. a kapacitást, egyenlő mennyiségeket kapunk, amely csak a geometriától függ.

Gömbkondenzátor: $C = \frac{Q}{U}$

$$U_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

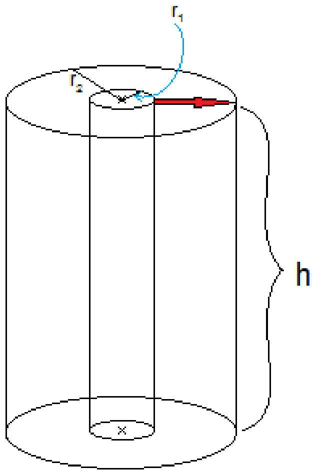
$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$



6. Gömbkondenzátor fegyverzetei között ρ fajlagos ellenállású anyag található. Mekkora a villamos ellenállás a 2 fegyverzet között?

$$R = \int \frac{\rho}{A} dl \;\rightarrow\; R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{A} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Hengerkondenzátor kapacitása



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \qquad U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda h}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot ln\frac{r_2}{r_1}} = 2\pi\varepsilon \cdot \frac{h}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

A stacionárius áram munkája és teljesítménye

Ha a fogyasztó be és kivezetése közötti feszültség *U* és rajta *t* idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor a mező munkája:

$$W = QU = UI\,t$$

Ez annak a munkának az értéke, amit a mező végez az *U* feszültségű szakaszon *t* idő alatt, miközben ott *I* erősségű áramot hajt. Az elektromos energia különböző gépek, berendezések, stb., az ún. fogyasztók segítségével más energiává alakítható át, pl.

» mechanikai energiává (motorok)

» kémiai energiává (akkumulátorok)

» hőenergiává (vasaló, hősugárzó)

» fényenergiává (izzólámpa, LED)

Ha a fogyasztó ohmos ellenállása nem nulla, hőenergia mindig keletkezik. Az Ohm törvény segítségével ezt két további alakban is kifejezhetjük. Amennyiben az ellenállás *R*, az elektromos áram munkáját a Joule-törvény adja meg:

$$W = UI \cdot t = I^2 R \cdot t = \frac{U^2}{R} t$$

A stacionárius áram teljesítménye pedig:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

A Joule törvény differenciális alakját úgy kaphatjuk meg, hogy egy homogén drótban leadott teljesítményt osztjuk a drót térfogatával, amelyet a $\mathrm{V} = \mathrm{A}\ell$ ad meg:

$$\frac{P}{V} = \frac{UI}{V} = \frac{E\ell \cdot jA}{A\ell} = jE\,,$$

azaz a differenciális Joule-törvényt a következő formákba lehet írni:

$$\mathrm{p_J} = \vec{\mathrm{E}}\vec{\mathrm{j}} = \rho \mathrm{j}^2 = \sigma \mathrm{E}^2 = \ldots,$$

ahol p_J-vel az egységnyi térfogatban egységnyi idő alatt keletkezett hőt, azaz a Joule-hő teljesítménysűrűségét jelöltük. Inhomogén esetben ezt kell integrálni a térfogatra, hogy az összes teljesítményt megkapjuk.