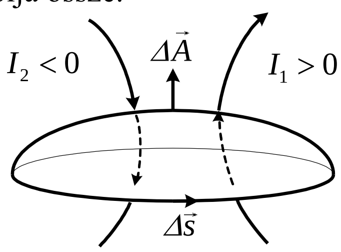
Mágnesesség

Mágneses tér gerjesztése: Az Ampère-féle gerjesztési törvény

Korábban említettük, hogy mozgó töltések mágneses mezőt hoznak létre. A mérési tapasztalatok alapján felállított **Ampère-féle gerjesztési törvény** vékony vonalas áramok esetén azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével:

$$\oint_g \vec{H} d\vec{s} = \sum_j I_j$$

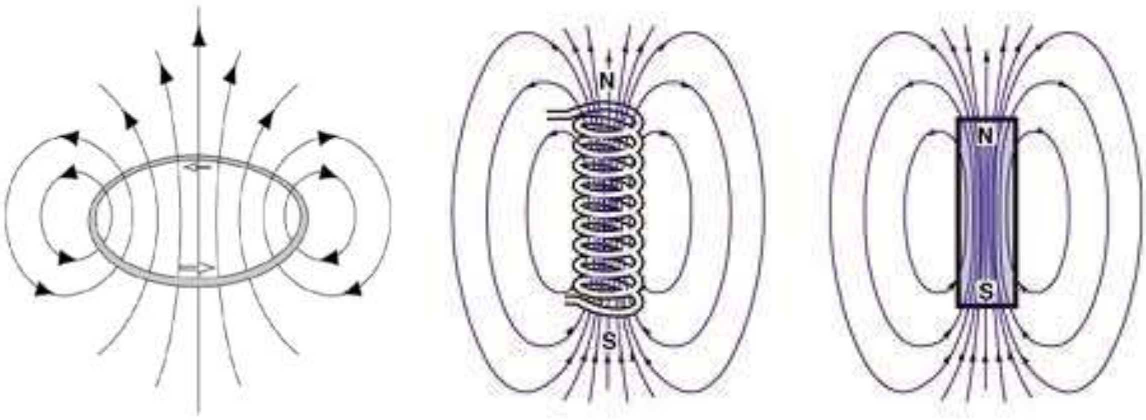
Az áramerősségek algebrai összegénél az előjelezésre azt a szabályt használjuk, hogy az az áram, amelyik a felületet a felület normálisának irányában döfi pozitív, amelyik azzal ellentétesen döfi, az pedig negatív. Megállapodás szerint, a peremgörbe körüljárási irányát és a felületi normális irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze.



A zárt görbe által körülfogott áramok előjelezése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény írja le az áram és az általa gerjesztett mágneses mező közötti összefüggést. Tapasztalati tény, hogy a gerjesztési törvény akkor is érvényben marad, ha térben mágnesezhető anyagok vannak jelen. A gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{j}}$. A stacionárius áram mágneses mezeje tehát *nem örvénymentes.* Az áramba bele kell számítani nem csak a konduktív áramot (vezetési áram, ami pl. a fémekben folyik), hanem a konvektív áramot is. Tehát pl. pozitív ionok áramlanak vákuumban, akkor is mágneses tér gerjesztődik.

Kiszámítható és kísérletileg is ellenőrizhető, hogy az áramhurok és a szolenoid tekercs az ábrán látható teret gerjeszt. Utóbbihoz hasonló a mágneses dipólus (pl. rúdmágnes) tere is.



A mágneses indukció-vektor bevezetése

A mágneses mezőt jellemző vektort, a $\vec{\mathrm{B}}$ mágneses indukcióvektort az Ampère-erő segítségével definiáljuk. Tekintsünk egy áramjárta egyenes vezetőt, amelyet a (homogén) mágneses mező egy tetszőleges pontjába helyezzük, és mérjük a rá ható erőt. A vezetőre jellemző adatok az áramerősség I, és az az $\vec{\ell}$ vektor, amely az áram irányába mutat, hossza pedig megegyezik a vezető hosszával.

A mérési tapasztalatok szerint a vezetőre ható erő mindig merőleges a vezetőre: $\Delta\vec{F} \perp \vec{\ell}$. Homogén térben mindig felvehető egy olyan kitüntetett *e* egyenes, amelynek irányába állítva az vezetőt $\vec{\ell} \parallel e$, rá erő nem hat, $\vec{F} = \vec{0}$. Ha a vezető α szöget zár be az *e* egyenessel, akkor az erő merőleges az $\vec{\ell}$ és *e* síkjára és nagysága arányos az I árammal, az $\vec{\ell}$ vektor ℓ hosszával, valamint a közbezárt szög szinuszával. A $\dfrac{F}{\mathrm{I}\,\ell\sin\alpha}$ hányados az áramelem adataitól már nem függ, kizárólag a mágneses mezőt jellemzi, ezt nevezzük a mágneses indukció nagyságának.

$$B = \frac{F}{\mathrm{I}\,\ell\sin\alpha}$$

A mágneses indukció iránya pedig párhuzamos az *e* kitüntetett egyenessel, és értelme olyan, hogy $\vec{\ell}$, $\vec{B}$ és $\vec{F}$, ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkosson: $\left\{\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F}\right\}$. A mágneses indukció mértékegysége: $\left[B\right] = 1\frac{N}{Am} = 1\frac{Nm}{Am^2} = 1\frac{VAs}{Am^2} = 1\frac{Vs}{m^2} = 1tesla = 1T$

Ezt felhasználva az **Ampère-erő** *képlete*:

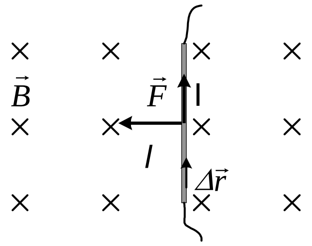
$$\boxed{\vec{F} = \mathrm{I}\vec{\ell} \times \vec{B}}$$

Ha a vezető nem egyenes, vagy a tér nem homogén, akkor kicsi $\Delta\vec{r}$ darabokra kell osztani a vezetőt. Az ilyen darabokra ható erő:

$$\Delta\vec{F} = \mathrm{I}\Delta\vec{r} \times \vec{B}$$

Egy vékony vonalas vezetőre ható erőt a vezetőszakaszra való integrálással kaphatjuk meg:

$$\vec{F} = I\int(d\vec{r}\times\vec{B})$$



Ampère-erő iránya

Tekintsünk egy *l* hosszúságú *A* keresztmetszetű vonalas vezetőszakaszt, és az legyen merőleges a homogén mágneses mezőre (lásd az ábrát). Ekkor az erő iránya az ábrán látható, a nagysága pedig: $F = BIl$. Ha a vezeték α szöget zár be a $\vec{B}$ mágneses indukcióval, akkor: $F = BIl\sin\alpha$

A Lorentz-erő

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a vezetőben folyó I áram azt jelenti, hogy N db q töltésű elektron ugyanazon v sebességgel halad az ℓ hosszúságú vezetőben, (azaz ugyanazon Δt idő alatt teszi meg az ℓ távolságot) ekkor I=Nq/Δt és v= ℓ /Δt. Ezeket az Ampere-erő képletébe beírva az N db elektronra ható erő:

$$F = BI\ell = BNq\cdot\ell/\Delta t = BNqv$$

Vagyis az egy elektronra ható erő

$$F = qvB$$

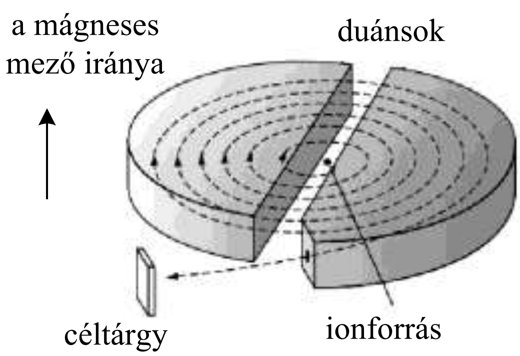
Általánosan egy $\vec{B}$ mágneses térben $\vec{v}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ható erő, az ún. **mágneses Lorentz-erő**:

$$\boxed{\vec{F}=q\,\vec{v}\times\vec{B}}$$

Ez az erő merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, $\{\vec{v},\vec{B},\vec{F}\}$ ilyen sorrendben jobbsodrású rendszert alkot. Ha elektromos tér is van jelen, a q töltésre az $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ elektromágneses Lorentz-erő hat.
Az áram a töltéshordozók rendezett mozgása. Az áramvezetőre azért hat erő a mágneses mezőben, mert a mozgó töltéshordozókra hat erő, és mivel ezek a vezetőhöz vannak kötve, az erő átadódik a vezető testének.

A (mágneses) Lorentz-erő minden pillanatban merőleges a sebességre, ezért a sebesség nagysága nem változik, csak az iránya (vagyis a mágneses Lorentz-erő teljesítménye nulla). Például, ha $\vec{v}$ merőleges $\vec{B}$-re, a töltött részecske körpályára kényszerül, ha $\vec{v}$ nem merőleges $\vec{B}$-re, akkor a töltés csavarvonal mentén mozog.

Alkalmazás: A Lorentz-erőnek fontos szerepe van akkor, amikor töltött részecskéket akarnak eltéríteni, illetve gyorsítani. A ciklotron egy olyan részecskegyorsító, amiben a Coulomb erőt használják a sebesség nagyságának növelésére és a Lorentz erőt a részecske körpályán tartására.



A ciklotron részecskegyorsító vázlata

A töltött részecskék gyorsítása a két „duáns” között történik, amelyekre váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek frekvenciáját úgy számítják ki, hogy mindig gyorsítsa a részecskét, azaz amikor a részecske a duánsok között van, akkor az a duáns, amely felé éppen repül, vonzóerőt fejt ki rá. Az alkalmazott homogén mágneses mező pedig körpályára kényszeríti a részecskét, vagyis a centripetális erőt a Lorentz-erő adja:

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{QB},$$

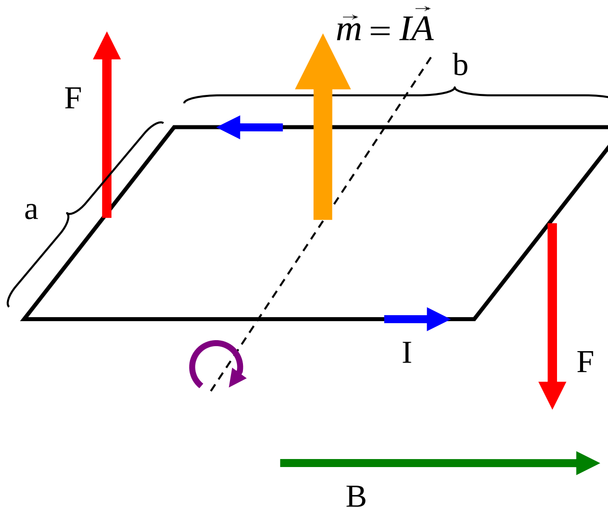
tehát ahogy gyorsul a részecske, úgy kerül a középponttól távolabb. A körmozgás periódusideje:

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi m}{QB}$$

Vagyis a periódusidő (és ezzel a körfrekvencia) a sebességtől és a pálya sugarától független állandó. Ez azért fontos, mert így állandó frekvenciájú feszültséget lehet a duánsokra kapcsolni a gyorsításhoz. Ezekkel a berendezésekkel (és más típusú gyorsítókkal) egyrészt a természetben végbemenő radioaktív bomlásoknál jóval nagyobb sebességű (és így jóval nagyobb mozgási energiájú) részecskéket lehet előállítani (sok reakcióhoz ez szükséges). Másrészt el lehet érni, hogy a részecskékből álló nyaláb monoenergiás legyen, azaz mindegyikük sebessége kb. ugyanakkora legyen. Ezt a berendezést főleg orvosi diagnosztikában használt izotóptermelésre használják, például $^{131}_{53}I$ jód izotópot állítanak elő, valamint anyagvizsgálatra, illetve magfizikai alapkutatásra.

Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra

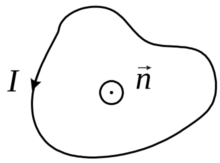
Vegyünk egy egyszerű esetet, egy téglalap alakú áramhurkot, amelyben pozitív irányba folyik az áram (kék nyíl). A téglalap oldalai legyenek *a* és *b*, a terület *A*=*ab*. A mágneses indukció (zöld nyíl) homogén és a *b* oldallal párhuzamos. Ekkor a két *a* hosszúságú oldalra egyenként *B*I*a* erő hat (piros nyilak), amelyek ellentétes irányúak. A *b* hosszúságú oldalakra nem hat erő, tehát *az eredő erő nulla*.
Általánosan is igaz a következő állítás: homogén mágneses térben nyugvó zárt áramhurokra nem hat mágneses erő.
A forgástengelyt az egyszerűség kedvéért a középpontban véve (szaggatott vonal), a két erő ugyanarra forgat (lila görbe nyíl), mindkettő erőkarja *b/2*.



Az eredő forgatónyomaték $2 \cdot \mathrm{BIa} \cdot \mathrm{b}/2 = \mathrm{BIab} = \mathrm{BIA}$.
Belátható, hogy ez a nyomaték az áramhurok alakjától független és az általános összefüggés:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = I\vec{A} \times \vec{B},$$

ahol $\vec{A} = A\vec{n}$ a felületvektor melynek irányítását jobb kéz szabály szerint adhatjuk meg. A kicsiny sík áramhurokban folyó áram iránya és a felületi normális iránya a jobbcsavar szabály szerint kapcsolódik össze.



A felületi normális iránya

Megállapodás szerint az itt bemutatott jelölés $\odot$ a felületből kifelé mutató vektort jelent, a felületbe befelé mutató vektort pedig a következő módon jelöljük: $\otimes$.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot már korábban láthattuk:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ennek analógiájára az áramhuroknak mágneses dipólnyomatékot vagy dipólmomentumot tulajdonítunk:

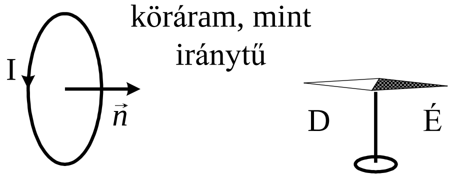
$$\overrightarrow{M_{forg}} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B},$$

ahol $\vec{m} = I\vec{A}$ az áramhurok **mágneses dipólmomentuma**, melynek mértékegysége: $[\vec{m}] = 1Am^2$
A permanens mágneses dipólusra (mágnestűre) ható forgatónyomaték hasonlóan:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad \text{ahol} \quad \vec{m} \,||\, \vec{l}$$

Az $\vec{m}$ mágneses dipólnyomaték abszolút értéke attól függ, milyen erősen van felmágnesezve a mágnestű. A dipólusra ható forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{m} \,||\, \vec{B}$. Vagyis a forgatónyomaték hatására a mágneses momentum (ha más hatás ezt nem akadályozza) **befordul a tér irányába**, mert ez jelenti az energia-minimumot[1]. A kis áramjárta hurok tehát iránytűként használható.

[1] Megjegyezzük, hogy az atomi mágneses momentumokra is hat forgatónyomaték, de ezek kvantummechanikai okok miatt forogni, precesszálni fognak a $\vec{B}$ iránya körül.



Permanens mágneses dipólus, és köráram hasonlósága

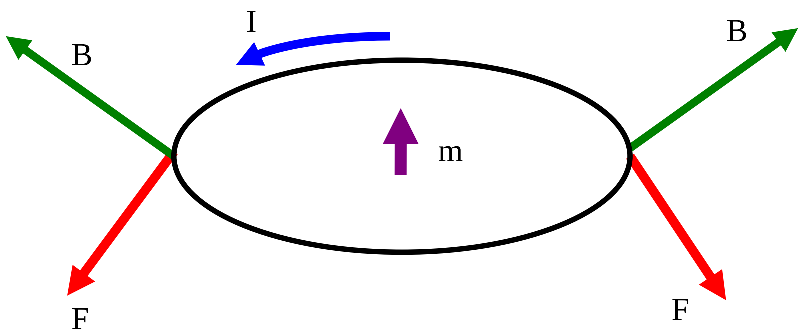
Az elektromos dipólusok analógiája felírható a mágneses dipólusok energiája mágneses mezőben:

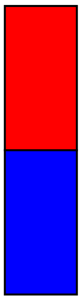
$$\boxed{E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

Inhomogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra ható erő

Könnyen belátható, hogy *inhomogén* mágneses mezőben az áramhurokra vagy általában a mágneses momentumra ható eredő erő általában nem nulla, hanem az inhomogenitás mértékétől (a térerősség gradiensétől) és a hurok elhelyezkedésétől függ. (Analógia: inhomogén elektromos erőtérben az elektromos dipólusra erő, homogénben csak forgatónyomaték hat.) Vizsgáljuk először egy ugyanolyan téglalap alakú áramhurkot, mint fentebb a forgatónyomaték-számításnál. Tegyük fel, hogy a $\vec{B}$ továbbra is ugyanolyan irányú, csak a jobb oldalon $\vec{B}+\Delta\vec{B}$ nagyságú. Ekkor nem kell sokat számolnunk: egyszerűen a jobb oldali erőt ki kell cserélni $\vec{F}+\Delta\vec{F}$-re, az eredő erő $\sum F = \Delta F = Ia \cdot \Delta B$ lesz. Felhasználva, hogy a mágneses momentum nagysága $|\vec{m}| = AI = abI$, kapjuk, hogy $\sum F = \Delta F = |\vec{m}| \cdot \frac{\Delta B}{b}$. Általános esetben az eredő erő kiszámítása bonyolultabb, de mindenképp igaz, hogy egyenesen arányos a mágneses momentummal és a mágneses indukcióvektor térbeli változási gyorsaságával.

Vegyünk most egy érdekesebb esetet, amikor egy kör alakú áramhurok alatt egy rúdmágnes van elhelyezve, a keret síkja alatt, rá merőlegesen, szimmetrikusan. Ekkor a mágneses indukcióvektor a vezető egyes kis szakaszain a szakaszra merőleges, kifelé-fölfelé mutat (zöld nyilak). Az vezető szakaszokra ható erők minden pontban a szakaszokra és $\vec{B}$-re merőlegesen, kifelé-lefelé mutatnak (piros nyilak). Az erők vízszintes komponensei a szimmetria miatt kiejtik egymást, ezért az eredő erő lefelé mutat. A keret mágneses momentuma felfelé irányul (kicsi lila nyíl), hasonlóan, mint a rúdmágnes momentuma. Számolás nélkül is megállapíthatjuk, hogy a két azonos irányban álló momentum vonzza egymást. Ha ellentétes irányban állnának, nyilván taszító erő lépne fel.



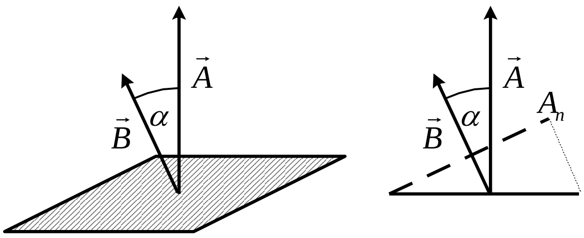


Mágneses indukciófluxus és Gauss-törvény

A mágneses mező szemléltetésére a mágneses *indukcióvonalakat* használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral. Megállapodás szerint a mágneses indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal haladjon át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

A mágneses indukciófluxus Φ irányított felületre vonatkozik, és megadja a felületet átdöfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Homogén mágneses mező esetén az A felület indukciófluxusa:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\alpha$$



A felület mágneses mezőre merőleges vetülete

Ha a mágneses mező inhomogén, akkor egy elemi kicsiny felület fluxusa $\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{A}$, egy tetszőleges A felület mágneses indukciófluxusa pedig integrálással nyerhető:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek, így tetszőleges zárt felületre számított mágneses indukciófluxusa mindig zérus. A mágneses Gauss-törvény tehát:

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincsen végük. A törvény differenciális/lokális alakja: $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, vagyis a mágneses indukciónak nincsenek forrásai.

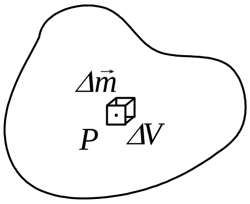
Mágnesesség az anyagban

A mágneses polarizáció, a mágnesezettség vektora

A nukleonok (proton, neutron) mágneses dipólnyomatéka sokkal kisebb, mint az elektronoké, ezért egy atom vagy molekula mágneses dipólnyomatéka lényegében megegyezik az elektronok dipólnyomatékának összegével. Az elektronok mágneses dipólnyomatéka két részből áll:

1. mozgásból származó mágneses nyomaték, mivel az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
2. saját mágneses nyomaték (a spinből adódik)

Az anyag mágnesezettségének jellemzésére vezessünk be egy új vektort. Legyen $\Delta\vec{m}$ a ΔV térfogatban lévő mágneses dipólnyomatékok vektori összege.



Az anyag mágnesezettségének bevezetése

Definíció szerint a mágnesezettség vektora a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses nyomatékot.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$$

A mágnesezettség mértékegysége: $[M] = 1\frac{Am^2}{m^3} = 1\frac{A}{m}$.

A mágneses térerősség és indukció kapcsolata

Definíció szerint

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

azaz

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Itt a $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ univerzális állandó a vákuum permeabilitása. A mágneses térerősség mértékegysége: $[H]=[M]=1\dfrac{A}{m}$. Ezzel a permeabilitás mértékegysége: $[\mu_o]=\dfrac{[B]}{[H]}=\dfrac{1\dfrac{Vs}{m^2}}{1\dfrac{A}{m}}=1\dfrac{Vs}{Am}$.

A $\vec{M}$ mágnesezettség, valamint a mágnesező $\vec{H}$ tér közötti kapcsolatot anyagegyenletnek nevezzük. Első közelítésben H és M között arányosságot feltételezünk, ilyenkor beszélünk lineáris anyagegyenletről: $\vec{H} \sim \vec{M}$. A legtöbb izotróp közegben a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok nemcsak egyirányúak, hanem a tapasztalat szerint egymással egyenesen arányosak is:

$$\boxed{\vec{M} = \chi \vec{H}}$$

χ a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

$$\vec{B} = \mu_o\left(\vec{H}+\vec{M}\right) = \mu_o\left(\vec{H}+\chi\vec{H}\right) = \mu_o(1+\chi)\vec{H} = \mu_o\mu_r\vec{H},$$

ahol $\mu_r = 1+\chi$ a relatív permeabilitás, $\mu = \mu_o\mu'$ pedig az abszolút permeabilitás.

Az anyagegyenlet gyakrabban használt formája: $\vec{B} = \mu_o(1+\chi)\vec{H}$, azaz

$$\boxed{\vec{B} = \mu_o\mu_r\vec{H}} \quad \text{vagy} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}.$$

A mágneses energia, mágneses energiasűrűség

Korábban már láttuk, hogy az elektromos mező energiasűrűsége az elektromos indukció és térerősség vektorok skaláris szorzatának a fele: $w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$

A *mágneses mező energiasűrűsége* teljesen analóg módon számítható a mágneses indukció és térerősség vektorokból:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

A w_m megadja az egységnyi térfogatban található mágneses energiát, mértékegysége (az elektromos esethez hasonlóan) J/m^3. Ha a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség $\vec{H}$ és a mágneses indukcióvektor $\vec{B}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\Delta V$ mágneses energia található. Ha a mező nem homogén, egy tetszőleges véges V térfogatban természetesen integrálással nyerhetjük a mágneses energiát:

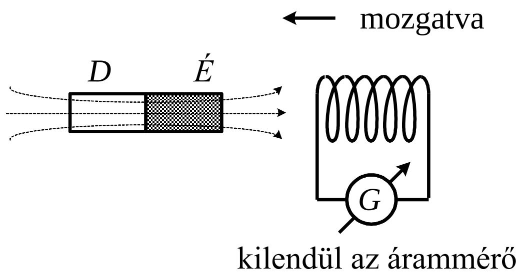
$$W = \int_V w_m dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

Az elektromágneses indukció

Mozgási indukció

Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat.

Ezt az erőt korábban idegen erőnek neveztük: $\vec{F}_* = q\vec{v}\times\vec{B}$. Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \dfrac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$.

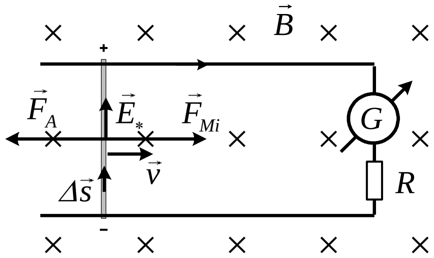


Mozgási indukció jelensége

A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}, \Delta\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat *lineáris generátornak* is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát (a rúd sebessége merőleges a mágneses indukcióvektorra és a rúdra), az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right) d\vec{s} = \mathrm{v}B\ell$$

A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R, akkor I=ε/R. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen[2], így azt egy $\vec{F}_{\mathrm{h}}$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

A fenti elrendezésnél ℓ a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h. Ekkor a hurok területe $A = \mathrm{h}\ell$, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége v=-dh/dt, de mivel ℓ konstans, $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\mathrm{h}\ell)/\mathrm{d}t = -\ell\mathrm{v}$. A mágneses indukciófluxus változási gyorsasága:

---

[2] ez a Lenz-törvény megnyilvánulása, lásd később

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B\frac{dA}{dt} = -B\ell v = -\varepsilon .$$

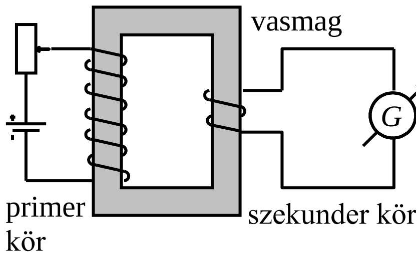
Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (Fluxus-szabály).
A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel. Az is könnyen látható, hogy ha homogén mágneses mezőben egy vezető keret haladó mozgást végez, akkor nem indukálódik benne feszültség.

Nyugalmi indukció

Az előző fejezetben azt kaptuk, hogy egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a mágneses indukciófluxus, azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.

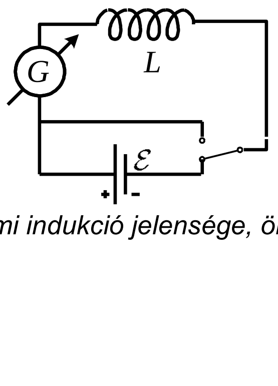


A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége.
A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget kölcsönös indukciónak nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Tekintsük most a következő elrendezést:



A nyugalmi indukció jelensége, önindukció

A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő mutatója nem ugrik rögtön a nullára (mint ahogy tekercs nélkül tenné), hanem egy ideig még fokozatosan csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenséget önindukciónak nevezzük, ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

Összegezve, a Faraday-féle indukciótörvény tömör alakja:

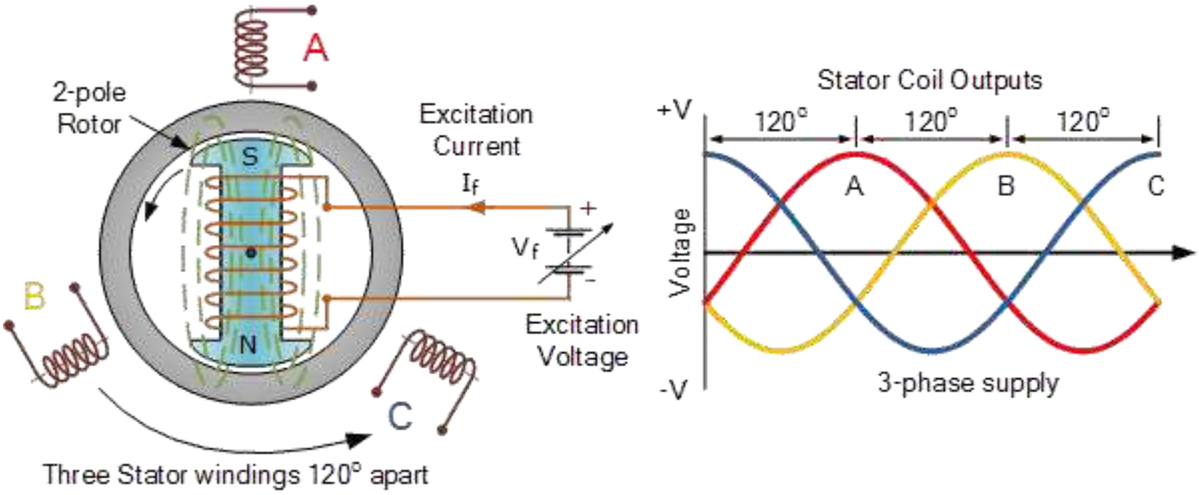
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahol $\Phi = \int_F \vec{B}d\vec{A}$ a mágneses indukciófluxus. Részletesebben kiírva:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.
A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az indukció miatt létrejött áram az őt létrehozó hatást (a mágneses fluxus változását) csökkenteni igyekszik, vele ellentétes hatást fejt ki. Azaz ha pl. a mágneses fluxus csökken, akkor olyan irányú áram indukálódik, amely a fluxust növeli, így az nem csökken olyan gyorsan, mint indukció nélkül tenné (lásd a fenti példát). Ezt a szabályt *Lenz-törvénynek* is nevezik. Ha nem lenne ott a negatív előjel, az indukció növelné az őt létrehozó hatást, akkor öngerjesztő folyamat indulna be, amely ellentmondana az energia-megmaradás törvényének.

Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező - épp ellenkezőleg - forrásmentes és örvényes.



A Maxwell-egyenletek

Ez a XIX. sz. egyik legnagyobb hatású egyenletrendszere, főleg azért, mert ebből az egyenletrendszerből vezették le az elektromágneses hullámok létezését.

1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum_n I_n + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial \mathrm{t}},$$

azaz mozgó töltések vagy az időben változó elektromos mező örvényes mágneses mezőt kelt.

2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}},$$

azaz az időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt kelt.

3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D}d\vec{A} = Q \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{D}} = \rho,$$

azaz az elektromos tér forrásai a töltések.

4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B}d\vec{A} = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0,$$

vagyis a mágneses tér forrásmentes.

A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához szükségesek az anyagegyenletek is, amelyek megadják, hogy mi a kapcsolat egyfelől az elektromos térerősség és az elektromos indukció, másfelől a mágneses térerősség és a mágneses indukció között. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathrm{E}}$ és $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, valamint az Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ahol a térerősségbe beleértjük az idegen térerősséget is. Míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek csak bizonyos anyagokra igazak, és közelítő jellegűek. Nem adnak számot pl. a ferromágnesesség, ill. a permanens mágnesesek létezésről.

Optika (eleje)

Elektromágneses hullámok

A Maxwell-egyenletekből hullámegyenlet vezethető le az $\vec{\mathrm{E}}$ és $\vec{\mathrm{H}}$ térerősségek komponenseire. A hullámegyenlet különösen egyszerű formát nyer homogén és izotróp szigetelőkben, azokban a frekvencia tartományokban, amelyekben a korábbi fejezetekben szereplő lineáris anyagegyenletek ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$) jó közelítéssel teljesülnek. Ekkor a homogén hullámegyenlet(ek) bármelyik térerősség komponensre:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

Deriválással bizonyítható, hogy ennek megoldásai például a mechanikából jól ismert síkhullámok. Egy pozitív x tengely irányába haladó hullámban a térerősségeket a

$$E = E_0 \sin\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad \text{és} \quad H = H_0 \sin\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

képletek írják le, ahol *λ* és *f* a hullám frekvenciája és hullámhossza. A megoldás visszahelyettesítése a hullámegyenletbe a $\frac{1}{\lambda^2 f^2} = \varepsilon\mu$ összefüggésre vezet. Mivel a hullám *c* terjedési sebessége a frekvencia és hullámhossz szorzata ($c = f\lambda$), az a közeg abszolút permittivitásával és permeabilitásával kifejezhető: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. A vákuumbeli terjedési sebesség (azaz a vákuumbeli fénysebesség) $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ egy univerzális állandó, amely jól ismert univerzális állandókból ($\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{C^2}{Nm^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$) kiszámítható. A számítás eredménye (amit a kísérletek is megerősítenek) a jól ismert $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$ érték.
Közegben a hullám terjedési sebessége függ annak elektromos és mágneses tulajdonságaitól: $\frac{c_{\text{vákuum}}}{c_{\text{közeg}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$. Tehát minél nagyobb a közeg relatív permittivitása és permeabilitása, annál kisebb ott a fény sebessége.

Megjegyezzük, hogy az elektromágneses hullámokat leíró képleteket átírhatjuk az

$$E = E_0 \sin\ \omega t - kx \quad , \quad H = H_0 \sin\ \omega t - kx$$

formába is, ahol ω(=2πf) a körfrekvencia, k pedig a hullámszám,

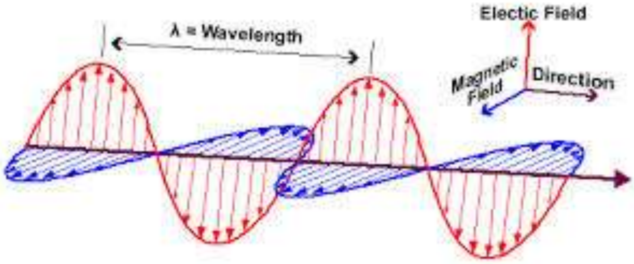
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ .$$

Ezek az összefüggések általános esetben (tetszőleges irányú hullám esetén)

$$E = E_0 \sin\ \omega t - \vec{k}\vec{r} \quad \text{és} \quad H = H_0 \sin\ \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

alakúak, ahol a $\vec{k}$ hullámszám vektor hossza k és a hullám terjedése irányába mutat. Ezeket a hullámokat szokás síkhullámoknak is nevezni, mivel az azonos fázisú pontok mértani helyei síkok.

Az elektromágneses hullámok **transzverzálisak**. A transzverzalitás – ahogy azt a mechanikában már megtanultuk - azt jelenti, hogy a hullámban terjedő vektormennyiség merőleges a terjedés irányára. Az elektromágneses hullámok esetében ezek a vektormennyiségek az elektromos és a mágneses térerősség-vektorok. Ezek a vektorok ráadásul **egymásra is merőlegesek**, ami többet jelent, mint a transzverzalitást. Tehát végeredményben az elektromágneses sugárzásban az elektromos és a mágneses térerősség-vektorok egymásra is és a terjedés irányára is merőlegesek. Ezt szemléltetendő vegyünk fel egy olyan koordináta rendszert, hogy $\vec{E}$ az *x* tengely, míg $\vec{H}$ az *y* tengely irányába mutasson (egy fél periódusideig a pozitív, aztán a negatív irányba), a terjedés iránya pedig a *z* tengely legyen.



A sugárzás a térben hullám formájában terjed ugyanazzal a *c* fénysebességgel, energiát (és persze tömeget és impulzust) szállítva. Mivel *c* minden elektromágneses hullámra ugyanaz, a $c=f\lambda$ képletből látható, hogy a frekvencia és a hullámhossz fordítottan arányosak. Megjegyezzük, hogy egyes kísérletekben a fény részecskeként viselkedik, a részecske (kvantum) neve **foton**. (Erről a klasszikus elektrodinamika nem tud számot adni, mi is a modern részben tárgyaljuk). A 380 nm és 780 nm (kerekítve 400 és 800 nm) közötti hullámhosszú elektromágneses sugárzás az emberi szem számára is látható, emiatt látható fénynek nevezik. Az összes elektromágneses sugárzás elrendezhető frekvencia (hullámhossz, ill. foton-energia) szerint, ekkor kapjuk az elektromágneses spektrumot.