Kinematika

A kinematika a mozgás matematikai leírása, az ok feltárása nélkül. Tekintsünk a továbbiakban tömegpontokat. A tömegpont olyan test, melynek jellemző méretei kicsik a pálya méreteihez képest. Egy tömegpont vagy bármely test helyzetét és helyzetváltozását is csak más (esetleg képzeletbeli) testekhez viszonyítva jellemezhetjük, vagyis minden mozgás viszonylagos, relatív. A mozgás leírásához választani kell egy vonatkoztatási rendszert: matematikailag ez egy koordináta-rendszert jelent. A tömegpont helyzetét egy adott *t* időpillanatban egy helyvektorral jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a tömegponthoz húzott vektor: $\vec{r}(t)$.

Az elmozdulás a t_1 és a t_2 időpillanat között: $\Delta\vec{r}_{1,2}=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$, ez is vektormennyiség.

Sebesség: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ azt jellemzi, milyen gyorsan változik a helyvektor (az irány és a nagyság is fontos!), pontosabban a helyvektor változási gyorsasága, vagyis idő szerinti deriváltja

Gyorsulás: $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ a sebességvektor változási gyorsasága.

Ezekből az összefüggésekből leolvasható, hogy a sebesség-idő függvény a gyorsulás-idő függvényből integrálással kapható meg: $\vec{v}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}(t)dt+\vec{v}(t_0)$,

a hely-idő függvény pedig ebből további integrálással adódik:

$$\vec{r}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\vec{v}(t)dt+\vec{r}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')dt'\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\vec{v}_0(t)dt+\vec{r}(t_0)$$

A megtett út (skalár!) kiszámításánál is a sebesség fontos, de mindegy, milyen irányban haladt a test. Tegyük fel, hogy a vonat 80km/h-val halad, ekkor mindegy, hogy észak felé megy egy órát, vagy kelet felé, a megtett úgyis 80km lesz, tehát csak a sebességvektor nagysága számít, csak az abszolút-értékét kell integrálni: $s_{1,2}=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{v}(t)|\,dt$.

Koordináta rendszerek és egyszerű mozgások

A) Derékszögű Descartes koordináta rendszer:

Koordináták: x, y, z; általában függnek az időtől.

Egységvektorok: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, merőlegesek egymásra, egységnyi hosszúak, nem függnek az időtől, jobbsodrású rendszert alkotnak. A pont helye a t időpillanatban: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, tehát pl. az *x* koordináta adja az $\vec{i}$ irányban az origótól mért távolságot. A Pitagorasz-tétellel kapjuk, hogy $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és pl. $x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}$.

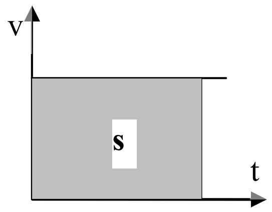
A sebesség: $\vec{v}(t)=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$, ebből a sebesség nagysága: $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$. A pont idő szerinti deriválást jelöl, tehát $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ a sebességvektor koordinátái.

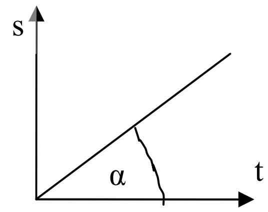
A gyorsulás: $\vec{a}(t)=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$, ebből a gyorsulás nagysága: $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$

Példa 1.: Egyenes vonalú egyenletes mozgás: v=állandó. (Egy dimenzióban tárgyaljuk)

A gyorsulás nulla (konstans deriváltja nulla). A megtett út kiszámítása:

$r(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt+r(t_1)\Rightarrow\Delta r=v\Delta t$, (felhasználtuk, hogy a sebesség nem függ az időtől, ezért kiemelhető az integráljel elé). Látható, hogy visszakaptuk a kisiskolás képletet: v=s/t, most már tudjuk, hogy ez csak állandó sebesség esetén igaz. Az út ekkor az idővel lineárisan nő: s=vt, vagyis az utat ábrázolva egy olyan egyenest kapunk, amelynek meredeksége, változási gyorsasága konstans *v*, azaz v=tgα=s/t. Ha a sebességet ábrázoljuk az idő függvényében, a görbe (ami most egyenes) alatti terület lesz a megtett út



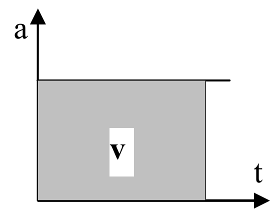


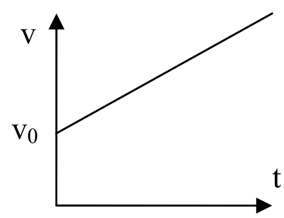
<u>Példa 2.:</u> Egyenletesen változó mozgás (pl. szabadesés), a gyorsulás: *a*= konstans. Maradjunk egy dimenzióban, tegyük fel pl., hogy a gyorsulásnak és a kezdősebességnek is csak *z* komponense van. A sebesség-idő függvény kiszámítása: $v(t_2)=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + v(t_1) = a\cdot(t_2-t_1)+v(t_1) \Rightarrow \Delta v = a\Delta t$.

Tehát az $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ középiskolás képlet csak akkor érvényes, ha a gyorsulás állandó.

Az elmozdulás kiszámítása: $z(t_2)-z(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(at+v_0)dt$, ha az origóból indultunk: $z=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

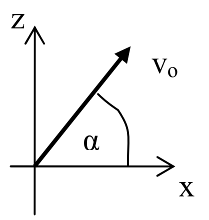
Vagyis a sebesség lineárisan változik, az egyenes meredeksége *a*. Ha felrajzolnánk a z koordináta változását, az egy parabola lenne.





<u>Példa 3.:</u> Ferde hajítás

A pont az origóból indul, a koordináta rendszer *x* tengelye mutasson a kezdősebesség vízszintes komponense irányába, a *z* tengely felfelé mutat. Először fel kell bontani a kezdősebességvektort vízszintes és függőleges komponenseire. Az *x* komponense $v_{ox}=v_o\cos\alpha$, a függőleges $v_{oz}=v_o\sin\alpha$.



y irányban nincs elmozdulás, tehát a $\vec{j}$ egységvektor mindig nullával szorzódik.

A gyorsulás: $\vec{a}=-g\vec{k}$, mivel csak *z* irányban és lefelé gyorsul a test, végig a mozgás során.

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t)= v_{ox}\vec{i} + 0\,\vec{j} + (-gt+v_{oz})\vec{k}$.

A helyvektor koordinátái: $\vec{r}(t)= v_{ox}t\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + (-g/2t^2+v_{oz}t)\vec{k}$

A test akkor ér földet, ha az $\vec{r}(t)$ függvény z komponense nulla, azaz ott a $\vec{k}$ egységvektor együtthatója nulla: $-g/2t^2+v_{oz}t=0$, ennek két megoldása van de a triviális t=0 megoldás csak azt mutatja, hogy az origóból dobtuk el a testet. A másik megoldás adja a mozgás teljes időtartamát: $t=2v_o\sin\alpha/g$. Ha ezt beírjuk az $\vec{r}(t)$ függvénybe, az első tagban az $\vec{i}$ együtthatója adja a hajítás távolságát:

$$x_{max}=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

B) síkpolár koordináta rendszer (2 dimenzió). Koordináták: r és φ (r az origótól mért távolság, φ a tengelytől mért szög). Különösen körmozgás leírásánál előnyös, ha az origót a kör közepén vesszük fel. A Descartes-koordinátákkal való kapcsolat: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, tgφ=y/x, x=rcosφ, y=rsinφ.

<u>Szögsebesség</u> definíciója: $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$, a szög változási gyorsasága (a szöget radiánban mérve).

Szöggyorsulás: $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ azaz milyen gyorsan változik a szögsebesség.
Példa 4.: egyenletes körmozgás, ω= állandó, azaz β=0. Ekkor a φ szög lineárisan változik: $\varphi = \omega t$. Legyen T az egy kör megtételéhez szükséges idő, tehát T idő alatt a φ szög 2π-vel változik. Ekkor ω=Δφ/Δt=2π/T. A T idő alatt megtett út a kör kerülete, s(T)= 2πr. A sebesség állandó, tehát v=s(T)/T=2πr/T=rω, kerületi sebességnek is nevezik.
A centripetális gyorsulás $a_{cp}=v^2/r=r\,\omega^2=v\omega$, a sebesség irányának megváltozása (ha a pont nem egyenes vonalon mozog, gyorsulása semmiképp nem azonosan nulla!). A gyorsulás centripetális komponense merőleges a sebességre, ezért normális gyorsulásnak is hívják.
Példa 5.: egyenletesen változó körmozgás, β=állandó (és persze a kör sugara is állandó).
A szögsebesség lineárisan változik: $\omega(t)= \beta t+\omega_0$, a sebesség hasonlóan: $v(t)= \beta tr+\omega_0 r$.
A tangenciális gyorsulás: $a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta$ a sebesség nagyságának megváltozását jellemzi, a sebesség irányába mutat, azaz érintőirányú. (Ha a sebesség csökken, akkor a sebességgel ellentétes irányba mutat.) A gyorsulás nagyságát, mivel a két komponens merőleges, „pitagorasszal" kapjuk:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

A megtett utat hasonlóan számoljuk ki, mint a 2. példában: $s = \frac{1}{2}a_t t^2 + v_0 t$

C) henger-koordináta rendszer (3 dimenzió). Koordináták: r és φ (ugyanaz, mint a síkpolárnál) és *h*, ami a harmadik dimenziót adja. Különösen csavarszerű mozgások leírásánál előnyös.

Tömegpont dinamikája

Newton törvényei (ezek a klasszikus mechanika legfontosabb, legalapvetőbb axiómái, 1687-ből):

I. Minden test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg más testek ennek megváltoztatására nem kényszerítik.
Pontosabb ennél a kiválasztási axióma: Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebességvektor állandó). Ezeket a vonatkoztatási rendszereket inerciarendszernek nevezzük.
II. A dinamika alapegyenlete: Ha egy állandó tömegű testre egyetlen erő hat, akkor az egyenlő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával: $\vec{F} = m\vec{a}$, vagyis a gyorsulást úgy számolhatjuk ki, hogy a testre ható erőt elosztjuk annak tömegével.
III. Akció-reakció vagy hatás-ellenhatás törvénye: Ha az *A* test a *B* testre F_{AB} erőt fejt ki, akkor *B* test is erőt fejt ki az *A* testre. Ezen F_{BA} erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az eredeti F_{AB} erővel: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$
IV. Szuperpozíció elve: Ha az anyagi pont egyidejűleg több hatásnak is ki van téve, azaz több erő hat, akkor együttes hatásuk egyetlen ún. eredő erővel helyettesíthető. Eredő erő az egyes erők vektori összege $\vec{F_e} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Erők fajtái és az erőtörvények:

a) Newton-féle gravitációs erő: $F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$. ($\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\,Nm^2/kg^2$ univerzális állandó)
Speciálisan ha m_1 a Föld tömege, r a Föld sugara: $G = mg$ a súlyerő.

b) Elektromos töltések között ható Coulomb-erő: $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$.

c) Mágneses Lorentz-erő: $\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$.

d) Rugóerő: $F_x = -Dx$ D rugóállandó, x az egyensúlyi helyzettől való kitérés

e) Súrlódási erő: $F_s=\mu F_{ny}$ (lehet csúszási vagy tapadási)

f) Közegellenállás vagy légellenállás: $F_k = -cv$ vagy $-cv^2$

Newton I., II., és IV. axiómájából kapjuk a feladatoknál gyakran használt összefüggést: inerciarendszerben $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Koordinátánként kifejtve kapjuk a tömegpont mozgásegyenleteit, amely egy három csatolt másodrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszer. Derékszögű Descartes koordináta rendszerben:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$
$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$
$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Ezek megoldásához általánosan 6 állandót kell megadni, ezek gyakran a kezdeti $\vec{r}(t=0)$ és $\vec{v}(t=0)$ vektorok komponensei. Az egyenletek megoldásával kapjuk az $\vec{r}(t)$ függvényt, amit mozgástörvénynek is neveznek. Tehát a mozgástörvényből közvetlenül kiolvasható, hogy mozog a test, azaz melyik időpillanatban hol tartózkodik.

Impulzus és Energia

A következőkben bevezetünk néhány olyan fizikai mennyiséget, amelyek alapvető fontosságúak a mechanikai feladatok megoldásában.

Az impulzus (lendület) definíciója: $\vec{I} = m\vec{v}$. Kérdés, mi szabja meg azt, hogy változik-e az impulzus, ill. milyen gyorsan változik. A választ a következő tétel adja meg:

Impulzustétel tömegpontra: $\frac{d}{dt}\vec{I} = \sum \vec{F}$, azaz tömegpont impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a rá ható összes erő eredőjével. Speciálisan, a magára hagyott tömegpont impulzusa állandó.

Bizonyítás: $\frac{d}{dt}\vec{I} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}$. Newton II. axiómája mellett felhasználtuk, hogy a tömeg állandó. Megjegyezzük, hogy az impulzustételt is szokták Newton II. axiómájának is nevezni, mivel ugyanazt fejezi ki (belőle a fenti alak levezethető), sőt, annyival általánosabb, hogy változó tömeg esetén is érvényes. Az érdekessége az, hogy adott eredő erő esetén a tömegtől független az impulzus-változás.

A munka általános definíciója: $W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r}$, az erő elmozdulás szerinti integrálja. Ha az erő állandó (és a tömegpont pályája egyenes, vagy az erő konstans szöget zár be a sebességgel), akkor kiemelhető az integráljel elé, ekkor $W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$, ahol α a közbezárt szög. $\alpha=0$-ra kapjuk a legegyszerűbb $W=Fs$ alakot.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak egy állandó F erő hat a tömegpontra, amely kezdetben nyugalomban van. Ekkor a pont gyorsulása a=állandó, sebessége t idő múlva $v=at$, ezalatt $s=at^2/2$ utat tesz meg. Ezeket felhasználva:

$$W = Fs = ma\cdot\frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_k$$

Vagyis a befektetett munka a test kinetikus (mozgási) energiájának növelésére fordítódott.

A munkatétel általános alakja: $\boxed{W=\Delta E_k}$. Tehát a test mozgási energiája (végső soron a sebessége) megváltozásának az az oka, hogy az eredő erő munkát végez a testen.

A (pillanatnyi) teljesítmény általános definíciója: $P = \frac{dE}{dt}$, az „egységnyi idő alatt közölt energia”, ez sokféle energia lehet. A mechanikában az átlagteljesítmény: $P = \frac{W}{\Delta t}$, ez tetszőlegesen hosszú Δt időtartamra értelmezhető. A mechanikai teljesítménytétel (a munkatételből deriválással kaphatjuk): $P = \frac{dE_k}{dt}$, azaz a tömegpontra ható erők teljesítménye megegyezik a tömegpont kinetikus energiájának változási gyorsaságával. Ezt felhasználva, egy dimenzióban $P = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}m(\dot{v}v + v\dot{v}) = m\dot{v}v = mav = Fv$. Általánosan, a pillanatnyi (mechanikai) teljesítmény az erő és a sebesség skaláris szorzataként is megkapható: $P = \vec{F}\vec{v}$

Konzervatív erőtér**:** Egy időtől (explicite) nem függő erőt konzervatívnak nevezünk, ha az általa a pontszerű testen *A* és *B* pont között végzett munka független az úttól, vagyis attól, hogyan jutottunk *A*-ból a *B*-be. Ez ekvivalens azzal, hogy az erő bármely zárt görbére vett integrálja nulla. Ekkor, ha kijelölünk egy kitüntetett *A* kezdőpontot, bármely másik (pl. *B*) pont jellemezhető azzal, hogy mekkora munkát végez az erő, ha a *B*-ből az *A*-ba megy a test. Ezt a munkát úgy hívjuk, hogy a test potenciális (vagy helyzeti) energiája a *B* pontban.

Példa 1.: Tegyük fel, hogy a padló szintje a kezdőpont, és leejtünk egy G=20N súlyú testet 80m magasról. Ekkor a nehézségi erő W=1600J munkát végez, más szavakkal a test helyzeti energiája E_p=mgh=1600J volt.

Tehát bármely *A* és *B* pontra

$$E_p(B) - E_p(A) = W = E_k(A) - E_k(B)$$

(itt a második egyenlőségnél a munkatételt használtuk) vagyis

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \, .$$

Ha bevezetjük az $E = E_p + E_k$ mechanikai energiát, akkor látható, hogy ez konzervatív erőtérben állandó. Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele. Konzervatív erőtér pl. a gravitációs és az elektrosztatikus erőtér. Ha nem-konzervatív erők is hatnak, akkor a munkájuk egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példa 2.: Leejtünk egy testet h=80m magasról, mekkora sebességgel csapódik a földbe? Ezt az energia-megmaradással legegyszerűbb megoldani: $\frac{1}{2}mv^2=mgh$, ebből $v = \sqrt{2gh} = 40\frac{m}{s}$.

Példa 3.: A fenti, m=2kg tömegű testet vízszintesen hajítjuk el v=30m/s kezdősebességgel 80m magasról. Mekkora lesz a sebessége, amikor a talajba csapódik? Kiszámolhatjuk úgy is, hogy felhasználjuk azt a kinematikából ismert tényt, hogy a vízszintes és függőleges irányú sebességkomponensek függetlenek egymástól és előbbi nem változik, utóbbi 40m/s-ra nő, vagyis a végsebesség „pitagorasszal” $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50m/s$. Energiamegmaradással mindez úgy néz ki, hogy kezdetben volt 1600J helyzeti és 900J mozgási energiája, tehát a földet éréskor van $1/2mv^2$=2500J mozgási energiája, ez 50m/s sebességnek felel meg. Vegyük észre, hogy a két módszerrel lényegében ugyanazokat a műveleteket kell elvégezni, csak az energiamegmaradásnál először szoroztunk, majd osztottunk 1/2m-mel.

Példa 4.: Minden ugyanaz, mint az előző példában, csak a testet most ferdén hajítjuk el a vízszinteshez képest α szöggel. A kinematikai számoláshoz ismernünk kell α-t, ki kell számolni a szinuszát és a koszinuszát a sebességkomponensekhez. Energiamegmaradással viszont pont ugyanúgy járhatunk el, mint az előző példánál és a végeredmény is annyi lesz. Tehát ha csak az a kérdés, hogy egy adott magasságban mennyi a test sebessége, akkor ezt a módszert érdemes alkalmazni, hiszen a kezdősebesség irányával nem is kell számolni. Viszont ha pl. a hajítás idejét is ki kell számolni, akkor szükség van a sebességkomponensekre.

Példa 5.: Egy 10m magas, $\alpha=45^o$-os lejtőről kezdősebesség nélkül lecsúszik egy test, a lejtő alján a sebessége 10m/s. Mekkora a súrlódási együttható? A test kezdeti helyzeti energiája

100m, végső mozgási energiája 50m, ahol m a tömeg. A kettő különbsége, 50m súrlódási munkára fordítódott, amelyet a $W_s=F_s s=\mu mg\cos\alpha \cdot 10/\sin\alpha$ képlettel számolunk ki, 10m-mel és g-vel egyszerűsítve $\mu=0,5$.

Példa 6.: A Newton-féle gravitációs erő potenciális energiája. Legyen egy rögzített M testünk és számoljuk ki egy tőle r távolságra lévő *m* tömegű test potenciális energiáját. Vegyük a végtelenben a nulla szintet, és távolítsuk az *m* testet *r* távolságból a végtelenig. Ekkor a gravitációs vonzóerő ellentétes irányú az elmozdulással, tehát E_p negatív lesz:

$$E_p(r)=\int_r^\infty \vec{F}d\vec{r}=\gamma m_1 m_2\int_r^\infty \frac{-1}{r^2}d\vec{r}=kQ\left[\frac{1}{r}\right]_r^\infty=-\frac{kQ}{r}$$

Példa 7.:A rugó potenciális energiája. Az $F_x=-Dx$ erőtörvény konzervatív erőteret ad meg. Számoljuk ki, mennyi munka kell, hogy a rugót feszültségmentes $x=0$ állapotból az $x=\ell$ -ig kihúzzuk: $W=\int_0^\ell F_x dx=D\int_0^\ell x dx=D\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\ell=\frac{1}{2}D\ell^2$

Rezgések

Rezgések (és hullámok) a fizikának és a műszaki tudományoknak nagyos sok ágában előfordulnak, pl. hangtan. Ha egy gitár egyik húrját festékpöttyel megjelöljük, a festett pont is rezgést végez. A legegyszerűbb rezgés a (szinuszos) harmonikus rezgés. Ilyet végeznek pl. szilárd test atomjai egyensúlyi helyzetük körül. Csak az egydimenziós esetet tárgyaljuk.

Harmonikus rezgés:

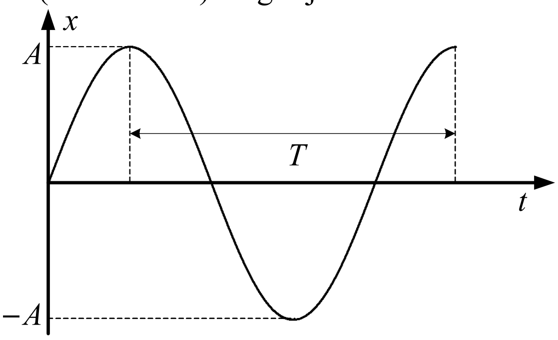
Akkor végez egy tömegpont harmonikus rezgést, ha rá egy erő hat, a rugalmas erő: $F_x=-Dx$, ahol x az egyensúlyi helyzettől való kitérés (ill. ha az erők eredője a fenti rugalmas erő). Tehát ez egy visszahúzó erő, ami arányos a kitéréssel, csak ellentétes irányú. Ebből kapjuk a mozgásegyenletet:

$$m\ddot{x}=-Dx\ .$$

Ez egy másodrendű közönséges differenciál-egyenlet, az általános megoldása:

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\delta),}$$

ahol $\omega^2=D/m$. Tehát szinuszos (harmonikus) rezgés jön létre.



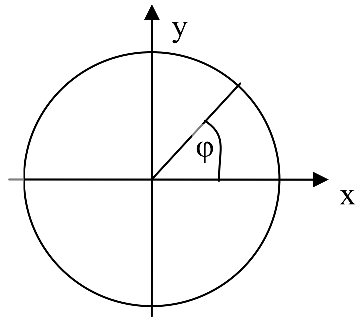
A sebesség-idő függvényt deriválással kaphatjuk: $v_x(t)=A\omega\cos(\omega t+\delta)$. Ha ezt még egyszer lederiváljuk és visszahelyettesítjük a mozgásegyenletbe, beláthatjuk, hogy a megadott x(t) függvény tényleg jó megoldás. Az *A* (amplitúdó, a kitérés maximális értéke) és a δ (kezdőfázis) konstansokat az *x* és v_x kezdeti értékei határozzák meg, ez utóbbiaknak viszont nincs hatásuk a frekvenciára. A periódusidő a legkisebb olyan T idő, amelyre $x(t)=x(t+T)$ bármely t-re. A körmozgáshoz hasonlóan $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Számítsuk ki a rezgő tömegpont kinetikus és a rugalmas erőtér potenciális energiáját:

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t)=\frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) \qquad \text{és} \qquad E_p=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

(feltettük, hogy δ=0 és felhasználtuk ω definícióját). Látható, hogy a kettő összege állandó ($DA^2/2$) és egy periódusra kiátlagolva a kettő megegyezik (ennek pl. a hőtanban lesz szerepe). Egy rezgés során a mozgási és a potenciális energia folyamatosan egymásba alakul. A mozgási energia akkor a legnagyobb, amikor a tömegpont az egyensúlyi helyzetén halad át, ekkor a rugó feszítetlen, tehát nincs energiája. Ezután ahogy a test lassul, a mozgási energia csökken, de pontosan ugyanilyen ütemben növekszik a potenciális energia, és amikor a test a szélső helyzetben egy pillanatra megáll, akkor nyilván a mozgási energia nulla, a potenciális pedig maximális.

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolata:



A szögsebesség állandó: $\varphi=\omega t$. Az x koordináta $r\cos\varphi$, az y pedig $r\sin\varphi$, beírva φ-t $x(t)= r\cos(\omega t)$ és $y(t)= r\sin(\omega t)$, tehát mindkettő harmonikus rezgőmozgást végez.
Más szavakkal, az egyenletes körmozgás előállítható két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás szuperpozíciójaként, ha a fáziskülönbség $\pi/2$.
Emiatt a hasonlóan jelölt mennyiségek között tényleges hasonlóság áll fent (az analógia nem pusztán formai): T a keringési vagy periódusidő, ω a szögsebesség vagy a körfrekvencia.

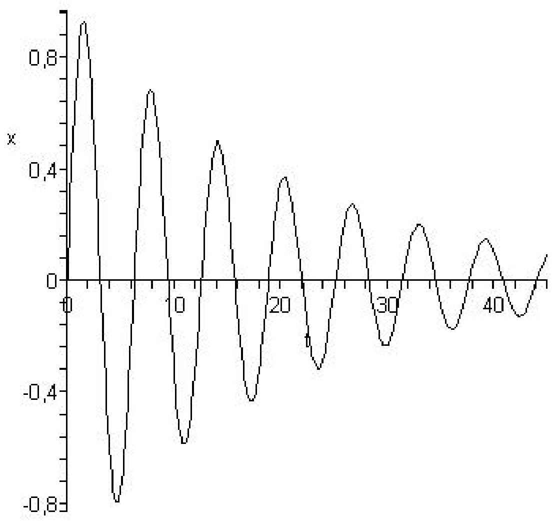
Csillapított rezgés:
A valóságban a makroszkopikus testek ritkán végeznek időben állandósult harmonikus rezgést, mivel a rezgés gyorsan vagy lassan, de csillapodik. Ezt úgy vesszük fegyelembe, hogy a rugalmas erőn kívül hat még egy sebességgel arányos fékező erő is: $F=-kv$, ezzel a mozgásegyenlet:

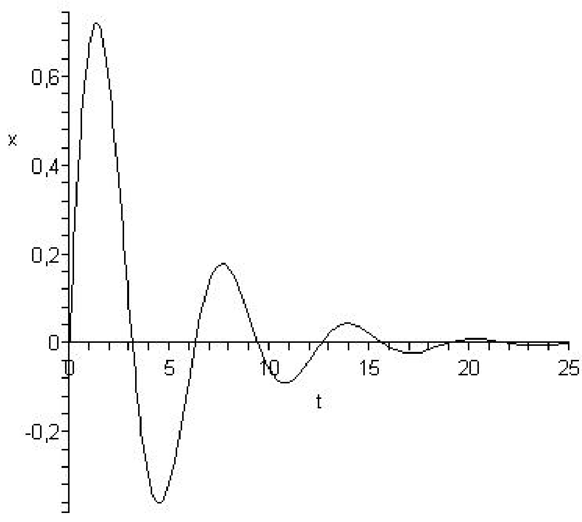
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \,.$$

Ennek megoldása gyenge csillapítás ($\alpha<\omega_o$) esetére

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta)\,,$$

ahol $\alpha = \dfrac{k}{2m}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2}$ és $\omega_o^{\,2}=D/m$. A maximális kitérés tehát exponenciálisan csökken az idővel (a mozgási energia is csökken, ezért a fékező erőt disszipációnak is hívjuk), a frekvencia pedig kisebb, mint ha nem lenne disszipáció. Az alábbi ábrákon két csillapított rezgés kitérés-idő függvénye látható, a másodiknál α kb. négyszer akkora, mint az elsőnél.

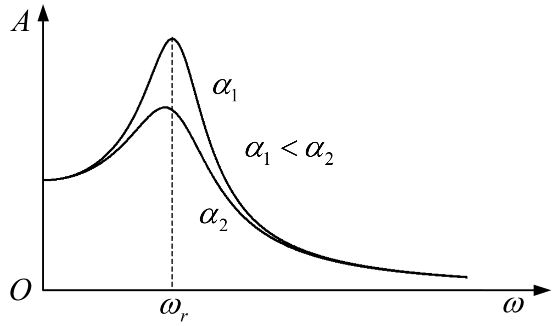




Kényszerrezgés: Ahhoz, hogy ne csillapodjon a rezgés, a disszipált energiát valamilyen módon pótolni kell. Legegyszerűbb esetben egy periodikus gerjesztő erő hat: $F_G=F_o\sin(\omega t)$.
Ezzel a mozgásegyenlet: $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_o\sin(\omega t)$. Ennek megoldása az előző, exponenciálisan lecsengő függvény és az

$$x(t)=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}\sin(\omega t-\delta)$$

függvény összegéből áll. Mivel az előbbi nullához tart, hosszú távon ez utóbbi, a stacionárius megoldás a lényeges, vagyis a frekvencia egyenlő a gerjesztő erő frekvenciájával. Itt δ azt jellemzi, mekkora a kitérés fáziskésése a gerjesztő erőhöz képest. δ függ az α, az ω és az ω_o mennyiségektől. Látható, hogy ha a disszipáció kicsi ($\alpha=\frac{k}{2m}$ kicsi) és a rendszer $\omega_0=\sqrt{D/m}$ sajátfrekvenciája közel van a gerjesztő erő ω frekvenciájához, akkor a nevező igen kicsivé, vagyis a maximális kitérés igen naggyá válik: **rezonancia** következik be. Tehát a rezonancia azt jelenti, hogy a rezgés amplitúdója, mint a gerjesztés frekvenciájának függvénye maximális értéket vesz fel. Az alábbi ábrán két, különböző disszipációhoz tartozó rezonanciagörbét láthatunk.



Tehát minél kisebb a csillapítás, annál élesebb, hegyesebb a rezonanciagörbe. Csillapítatlan rendszernél az $\omega=\omega_r$ helyen az amplitúdó a végtelenhez tartana, ezt nevezik rezonancia-katasztrófának.

Körmozgás dinamikája

Centripetális erő: $F_{cp}=ma_{cp}=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2$. Ez szükséges ahhoz, hogy a testet körpályán tartsa, vagyis hogy a sebesség irányát folyton változtassa, azaz centripetális gyorsulást okozzon.
A centripetális erő eredete lehet gravitációs vagy elektromos (Coulomb) erő, kötélerő, stb. Mivel a centripetális erő merőleges a sebességre, nem végez munkát, nem változtatja meg a test mozgási energiáját. Ez összhangban van a kinematikában tanultakkal, konkrétan hogy a centripetális gyorsulás csak a sebesség irányát változtatja meg.
Forgatónyomaték: Először tetszőleges irányú erőre definiáljuk az origóra vonatkoztatott forgatónyomaték vektort:

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F},$$

Rögzített tengely esetén, ha az erő a tengelyre merőleges síkban van, akkor az egyszerűbb képletet használhatjuk: M=kF, itt k az erőkar, vagyis az erő hatásvonalának a (rögzített) tengelytől való távolsága.
Impulzusmomentum (perdület): $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{I}=m\vec{r}\times\vec{v}$, speciálisan $L=mrv=mr^2\omega$. Ha egy tömegpont egyenletes körmozgást végez pl. az *x-y* síkban, akkor az impulzusmomentum-vektor iránya merőleges erre a síkra, vagyis a *z* tengely pozitív vagy negatív irányába mutat. Hogy a kettő közül melyikbe, azt a jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg: ha jobb kezünk behajlított ujjai mutatnak a pont haladási irányába, akkor hüvelykujjunk mutatja meg $\vec{L}$ irányát. Az impulzusmomentum-vektor csak akkor változhat, ha a tömegpontra forgatónyomaték hat:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\times\vec{v})=m(\frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{v})=m(\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{a})=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M},$$

vagyis a tömegpont impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő a tömegpontra ható forgatónyomatékkal. Ez az impulzusmomentum-tétel, nem csak körmozgásra igaz. Tehát ha az eredő erő forgatónyomatéka nulla, akkor a perdület állandó.

Példa 1. Egyenletes körmozgásnál csak centripetális erő hat, az impulzusmomentum állandó, a középpontra vett forgatónyomaték nulla.

Példa 2. Tegyük fel, hogy egy pont az *x-y* síkban körmozgást végez úgy, hogy az impulzusmomentum-vektor *z* irányba mutat, továbbá a forgatónyomaték-vektor iránya szintén *z*, nagysága állandó. Ekkor $\vec{L}$ változási gyorsaságának iránya (*z*) megegyezik $\vec{L}$ irányával, vagyis $\vec{L}$ növekszik, tehát egyenletesen gyorsuló körmozgás jön létre.

Ha feltesszük, hogy a pont rögzített tengely körül rögzített távolságban mozoghat, akkor ebben a speciális esetben $L(t)= mr^2\omega(t)$. Ezt deriválva, $\dot{L}(t)=mr^2\dot{\omega}(t) = mr^2\beta(t)$, ahol β a szöggyorsulás. Ha az mr^2 mennyiséget elnevezzük a tömegpont tehetetlenségi nyomatékának: $\theta= mr^2$, (a θ görög betű, ejtsd: „teta") ahol r a tengelytől való távolság, akkor az impulzusmomentum-tétel felhasználásával a feladatmegoldások során is gyakran használt formulához jutunk, amit a forgó mozgás alapegyenletének is neveznek:

$$\boxed{M = \theta\beta}$$

Ez a képlet teljesen hasonló szerkezetű az F=ma képlethez, csak körmozgásnál a gyorsulás helyett a szöggyorsulás, a tömeg helyett a tehetetlenségi nyomaték, az erő helyett a forgatónyomaték játszik szerepet.

A tömegpont mozgási energiája: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$. Itt is teljesen hasonló szerkezetű a két mozgási energiára vonatkozó képlet. Hasznos lehet a következő analógia-táblázat:

	Haladó mozgás (1 dim)	Forgó mozgás
változó	x	φ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x=ma_x$	$M=\theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x=mv_x$	$L= \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} mv_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x\Delta x$	$M\Delta\varphi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Bolygók mozgása

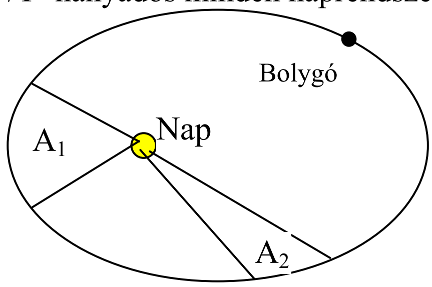
Tegyük fel, hogy egy *m* test egy másik, rögzítettnek tekintett M test gravitációs erőterében mozog, kering. Ekkor neki kétféle energiája van, kinetikus és potenciális. Utóbbit csak úgy tudjuk értelmezni, ha kijelöljük a kezdőpontot, a nulla szintet. Logikus, hogy akkor legyen a potenciális energia nulla, ha a keringő test nem áll kölcsönhatásban semmivel, vagyis végtelen távol van. Ekkor viszont a korábban levezetettek szerint a potenciális energia negatív. Ha az összenergia is negatív (tehát E_p abszolút értékben nagyobb, mint E_k), akkor a *m* test nem tud eltávolodni a végtelenbe, a M-hez van kötve, ekkor kötött állapotról beszélünk.

Kepler törvények: Így nevezzük a bolygómozgás három törvényét, melyet Johannes Kepler német csillagász állapított meg. Ezek bármely olyan testre vonatkoznak, amely egy másik test gravitációs erőterében kötött állapotban mozog, tehát pl. a Föld körül keringő Holdra is.

I. törvény: A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II. törvény: A bolygók napközelben gyorsabban mozognak, mint a Naptól távol. A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területet súrol. (Az ábrán $A_1 = A_2$ ha ugyanannyi ideig tartott a megfelelő íveken végighaladni)

III törvény: Az ellipszispályák nagytengelyeinek (végeredményben a bolygók Naptól való átlagos távolságainak) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük (T) négyzetei, vagyis az a^3/T^2 hányados minden naprendszerbeli bolygó esetén ugyanakkora.



Mind a három törvény bebizonyítható a Newton axiómákból és a Newton-féle gravitációs erőtörvényből. A valóságban a leszármaztatás inkább fordítva történt, Kepler hamarabb alkotta meg a törvényeit, mint Newton. A második törvény az impulzusmomentum-megmaradásból következik.

Csak a III. törvényt bizonyítjuk, azt is csak körmozgásra. Azt használjuk ki, hogy a centripetális erőt a gravitációs vonzás adja. Az első bolygóra: $F_1 = \gamma \frac{m_1 M}{R_1^2} = m_1 a_{cp,1} = m_1 R_1 \omega_1^2$ azaz

$\gamma M = R_1^3 \omega_1^2 = R_1^3 \frac{(2\pi)^2}{T_1^2}$. Ezt felírva a 2. bolygóra is: $\gamma M = R_2^3 \frac{(2\pi)^2}{T_2^2}$ és a két egyenletet elosztva egymással adódik, hogy $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$, ami körpályára ekvivalens az állítással.

Pontrendszerek és merev testek dinamikája

A valóságos testek nem csak egy pontból állnak, nem lehet elhanyagolni a kiterjedésüket. Pl. egy fogaskerék általában egy helyben áll, de forgó mozgást végez, amit, ha meg akarjuk érteni a gép működését, nem hanyagolhatunk el.
Példa: Tegyük fel, hogy az x tengelyen van két pont, az egyik, m_1=4kg tömegű x=1-nél, a másik, m_2=2kg tömegű az x=7-nél. Kérdés, hogy hol van a tömegközéppontjuk. Nyilván, a kétszer akkora tömegűtől fele akkora távolságra lesz, tehát x_t=3-nál. Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy a két pont x koordinátájának a tömegekkel súlyozott átlagát vesszük:
$x_t = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$

Általánosan, a tömegközéppont (súlypont) helyvektora (diszkrét) tömegpontrendszerre:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

A sűrűség általános (lokális) definíciója: $\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m(V)}{V}$, ahol m(V) a V térfogatban található anyag tömege. Ezzel egy folytonos tömegeloszlású test tömege $m = \int_V \rho dV$

Egy ilyen test tömegközéppontja: $\vec{r}_s = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m}$

Vizsgáljuk most egy tömegpontrendszer mozgását. Legyen $\vec{F}_i$ az *i*-edik tömegpontra ható külső erők eredője, $\vec{F}_{ji}$ a *j*-edik pont által az *i*-edikre kifejtett erő. Írjuk fel a dinamika alapegyenletét az *i*-edik tömegpontra: $\frac{d}{dt}\vec{I}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}$, összegezve *i*-re:

$$\sum \frac{d}{dt}\vec{I}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} ,$$

de Newton III. miatt ($\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ji}$) az utolsó tag nulla, így a belső erők kiesnek, ezzel adódik az

<u>impulzustétel tömegpontrendszerre:</u> $\frac{d}{dt}\vec{I} = \sum \vec{F}_i$,

azaz tömegpontrendszer impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő az összes *<u>külső</u>* erő eredőjével. Speciálisan, zárt rendszer impulzusa állandó (ez az impulzusmegmaradás tömegpontrendszerre). A baloldalt tovább alakítva és felhasználva a súlypont definícióját

$\frac{d}{dt}\vec{I} = \frac{d}{dt}\sum m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum m_i\vec{r}_i = m\vec{a}_s$, azaz

$$\boxed{m\vec{a}_s = \sum \vec{F}_i}$$

<u>Tömegközépponti tétel:</u> Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban lenne egyesítve és az össze külső erő erre a pontra hatna.

Hasonlóan levezethető az <u>impulzusmometum-tétel</u> tömegpontrendszerre: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$,

tömegpontrendszer impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő az összes *<u>külső</u>* erő forgatónyomatékának eredőjével.
<u>Munkatétel</u> tömegpontrendszerre: tömegpontrendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes *<u>külső és belső</u>* erők munkájával: $W=\Delta E_k$.

<u>Ütközések</u>: Csak két pontszerűnek tekintett test ütközését tárgyaljuk a legegyszerűbb esetben (egy dimenzió). Legyen a két tömegpont A és B, tömegük m_A és m_B sebességük kezdetben $v_A(1)$ és $v_B(1)$, az ütközés után $v_A(2)$ és $v_B(2)$. A sebességek itt előjeles mennyiségek.
Mindig teljesül az impulzusmegmaradás: $m_Av_A(1) + m_Bv_B(1) = m_Av_A(2) + m_Bv_B(2)$
Az energiamegmaradás szempontjából két határeset van: a teljesen rugalmas ütközés, amikor az összes mozgási energia megmarad, ekkor: $m_Av_A(1)^2 + m_Bv_B(1)^2 = m_Av_A(2)^2 + m_Bv_B(2)^2$
A másik határeset a teljesen rugalmatlan ütközés, ekkor a lehető legnagyobb mozgási energia-csökkenés következik be, a két test összetapad és közös (esetleg nulla) sebességgel haladnak tovább: $v_A(2) = v_B(2)$. Mindkét esetben két egyenletünk van, így a tömegek és a kezdeti sebességek ismeretében meg tudjuk határozni az ütközés utáni sebességeket.

Tömegpontrendszer <u>tehetetlenségi nyomatéka</u> az egyes pontok tehetetlenségi nyomatékának az összege: $\Theta = \sum m_i r_i^2$, ahol r_i az *i*-edik tömegpont távolsága a forgástengelytől. Látható, hogy a tömegpontok tengelytől való távolságának négyzete számít, az, hogy milyen irányban vannak, nem. Matematikailag: egy skalárt kell integrálni és az eredmény is skalár.
Folytonos tömegeloszlású testre: $\Theta = \int_V \rho r^2 dV$

Descartes koordinátákban, ha a forgástengely a *z* tengely: $\theta = \int_V \rho(x^2 + y^2)dxdydz$

Definíció: Akkor nevezünk egy testet merev testnek, ha bármely két pontjának távolsága állandó.
Merev test pontosan akkor van egyensúlyban, ha a testre ható összes külső erők eredője és a külső erők (tetszőleges pontra, ill. tengelyre vonatkozó) forgatónyomatékainak eredője nulla.
A forgómozgás alapegyenlete merev testre is igaz: $M=\theta\beta$

Ha ismerjük a tehetetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre (legyen ez θ_s), a <u>Steiner-tétel</u>lel könnyen kiszámíthatjuk azt bármilyen, az előzővel párhuzamos tengelyre, csak θ_s–hez hozzá kell adni a test tömegének és a két tengely távolsága négyzetének szorzatát.

Bizonyítás: legyen az (x,y) koordináta-rendszer origója a tömegközéppontban, a *z* tengely a forgástengely, a másik tengely az előzőtől *d* távolságra a -*x* irányban. Ezzel $\Theta_s = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$, a másik rendszerben az *y* koordináták ugyanazok, így $\Theta_d = \sum m_i \left(x_{i,d}^2 + y_i^2\right) =$
$= \sum m_i \left(\left(x_i + d\right)^2 + y_i^2\right) = \sum m_i \left[x_i^2 + y_i^2 + 2x_i d + d^2\right] = \Theta_s + 2d\sum m_i x_i + md^2$. De a súlypont x koordinátája az (x,y) rendszerben $\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = 0$, tehát $\Theta_d = \Theta_s + md^2$, ez pedig a tétel állítása.

Példa: Homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka, ha a tengely a rúdra merőleges és a rúd végén megy át (A rúd tömege $m=\rho V=\rho Al$)

$\Theta = \int_0^l \rho A r^2 dr = \rho A \frac{l^3}{3} = m\frac{l^2}{3}$. Ha a tengely a rúd közepén megy át, akkor könnyen levezethető (pl. a Steiner tétellel), hogy $\Theta = \frac{1}{12} ml^2$. A henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2} mR^2$ az alaplapjára merőleges, a szimmetriatengelyen átmenő tengelyre vonatkozólag.

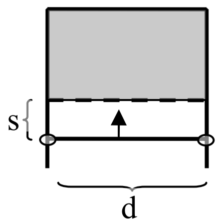
Folyadékok és gázok mechanikája

A merev testek után olyan anyagok mechanikájával foglalkozunk, amelyek alakjukat szabadon változtatják. Először álló folyadékokkal (és, bár nem mindig hangsúlyozzuk) gázokkal, majd a folyadékok áramlásának törvényszerűségeibe nyújtunk egy nagyon alapszintű bevezetőt.

Hidrosztatika

Nyugvó folyadékok mechanikája: A nyomás definíciója: $\mathrm{p} = \lim_{\mathrm{A}\to 0} \frac{\mathrm{F(A)}}{\mathrm{A}}$, ahol F(A) az A felületre ható erő nagysága, vagyis a nyomás skalármennyiség. Nehézségi erőtérben lévő folyadékban a nyomás csak attól függ, milyen magasságban van a felület, a felület irányításától nem. Legyen a felület vízszintes és legyen felette h magasságú folyadék, ekkor a folyadék térfogata Ah, a tömege ρAh, a súlya ρgAh, tehát a folyadék súlyából származó hidrosztatikai nyomás: $p_H=\rho gh$. Nyugvó folyadékban lévő tárgyakra vagy az edény falára a folyadék csak a felületre merőleges erőt fejthet ki.
Arkhimédész törvénye: A folyadékba mártott testre felhajtóerő hat, amely nagysága egyenlő a test által kiszorított, (azaz a test bemerülő részével egyenlő térfogatú) folyadék súlyával.
Bizonyítás teljesen bemerülő téglatestre: legyenek a téglatest vízszintes oldalai a és b, a függőleges c. A függőleges oldallapokra vízszintesen ható erők kiegyenlítik egymást, a felső vízszintes lapnál a nyomás legyen ρgh (ρ a folyadék sűrűsége) az alsó lapnál ρg(h+c). A fenti lapot eszerint ρghab erő nyomja lefelé, a lentit ρg(h+c)ab felfelé. Az eredő erő ρgcab. Mivel abc a téglatest térfogata, ρabc a kiszorított folyadék tömege, ρgabc a súlya, q.e.d.
Ha a test a folyadéknál nagyobb sűrűségű, lemerül az aljára, ha egyenlő sűrűségű, akkor lebeg, ha kisebb sűrűségű, akkor úszik (persze csak ha elég mély a folyadék és nem „fut zátonyra").
Lemerülésnél ahhoz, hogy a test egyensúlyba kerüljön, tartóerő szükséges: $F_t=G-F_f=(\rho_t-\rho_f)Vg$.
Úszás esetében a test súlya egyenlő a felhajtóerővel. A fenti téglatestre $\rho_t gabc= \rho_f gabm$, ahol m a bemerülési mélység. Ebből $m=c\cdot\rho_t/\rho_f$, általában a bemerülő térfogat: $V_{be}=V_t\, \rho_t/\rho_f$.
Felületi feszültség: ha egy zsilettpengét lapjával óvatosan nyugvó vízfelszínre helyezünk, az nem süllyed el. Ha erővel lenyomjuk a vízfelszín alá, akkor viszont nem jön fel, hanem elmerül, vagyis a sűrűsége nagyobb, mint a vízé. Mi az oka, hogy az első esetben nem süllyedt el?
Ha egy olyan drótkeretet, amelynek egyik oldala elcsúsztatható, mosószeres vízbe mártunk, a folyadék hártyaként feszül rá a keretre, és ha elég könnyű a drót, akár fel is emelheti.

A drótdarabra ható erő csak a a drót hosszától és a folyadék minőségétől függ, független a hártya felületének nagyságától. Képlettel: $F=\alpha d$. Ezen erő által végzett munka, miközben s-sel magasabbra emelte a drótot: $W=Fs=\alpha ds=\alpha\Delta A$, vagyis a felület-változással arányos. Következésképp a folyadéknak a felületével arányos energiát kell tulajdonítanunk: $E=\alpha A$. Ennek oka, hogy a folyadék részecskéi között rövid hatótávolságú erők hatnak. Ezért igyekeznek a folyadékok minimalizálni a felületüket, pl. a cseppek gömb alakot felvenni (súlytalanságban). Előfordul, hogy az edény fala és a folyadék részecskéi közötti vonzóerők erősebbek, mint a folyadék részecskéi által egymásra gyakorolt erő. Ekkor a folyadék „nedvesíti” az edény falát. Ezen alapszanak a hajszálcsöveknél megfigyelhető jelenségek is.



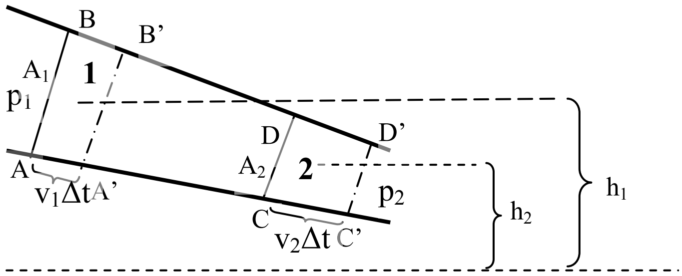
Hidrodinamika (áramlástan)

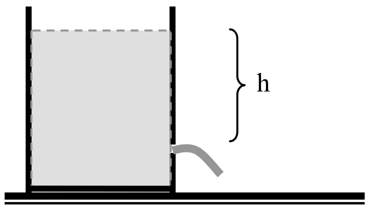
A folyadékok és a gázok is részecskékből (atomokból, molekulákból) állnak. Nem ezek pályáját követjük nyomon, hanem azt vizsgáljuk, hogy a tér egy adott pontjában mennyi az ott áramló részecskék sebessége, mennyi a nyomás, a sűrűség, stb. Stacionáriusnak hívjuk az áramlást akkor, ha a tér bármely pontjában ezek a jellemzők függetlenek az időtől. (Tehát nem arról van szó, hogy egy adott részecske sebessége lenne állandó, ez egy görbe csőben lehetetlen lenne!)
Az anyag- ill. tömegmegmaradásból következik, hogy ha egy csőben stacionárius módon áramlik a folyadék, akkor a cső bármely keresztmetszetén másodpercenként ugyanannyi tömegű folyadék áramlik át. Tegyük fel, hogy az áramcső vékony, azaz egy adott keresztmetszetnél a sebesség minden pontban ugyanakkora. Az első keresztmetszet legyen A_1, a második A_2, a megfelelő sűrűségek, ill. sebességek ρ_1 és ρ_2, ill. v_1 és v_2. Egy kis Δt idő alatt a folyadékrészecskék $v\Delta t$ utat tesznek meg, így az átáramlott folyadék térfogata $Av\Delta t$, a tömege $\rho Av\Delta t$. A két keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott tömeg (stacionárius esetben) egyenlő, tehát

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \,.$$

Ezt úgy hívják, hogy kontinuitási egyenlet vékony áramcsőre. Ha azt is feltesszük, hogy a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\rho_1=\rho_2$ vagyis $A_1v_1=A_2v_2$. (*)
Ezt általánosíthatjuk tetszőleges térfogatra. A térfogatban található folyadék tömege $\int_V \rho dV$.
Ez csak akkor változhat, ha a térfogatot határoló felületen nem ugyanannyi folyadék lép be, mint amennyi ki. A felület normálisa kifelé mutat, tehát a nettó kiáramlás $\int \rho\vec{v}d\vec{A}$. Ezzel a kontinuitási egyenlet általános alakja: $\frac{d}{dt}\int \rho dV = -\int \rho\vec{v}d\vec{A}$. Stacionárius áramlás esetén a baloldal nulla.
Összenyomhatatlan folyadékra a (konstans) sűrűséget kiemelhetjük az integrál elé, vagyis $0 = \int \vec{v}d\vec{A}$. Ennek speciális alakja a (*) egyenlet.

Próbáljuk meghatározni, hogyan függ a nyomás a sebességtől. Tegyük fel, hogy egy vékony csőben súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionáriusan áramlik. Tekintsük ebben a csőben a folyadéknak azt a részét, amelyet az **1**. és **2**. helyeken a A_1, ill. A_2 keresztmetszetű AB és CD felületek határolnak. A sebesség és a nyomás az **1**. és **2**. helyeken legyen v_1, p_1, ill. v_2, p_2. Alkalmazni fogjuk az ABCD folyadékoszlop kicsiny elmozdulására a munkatételt (energiamegmaradás!), amely szerint a kinetikus energia megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erők munkájával.





Az ABCD folyadékoszlop az igen kicsiny Δt idő alatt az A’B’C’D’ helyzetbe jut: az **1**. helyről a folyadékoszlop $AA'B'B=V=A_1v_1\Delta t$ térfogatú része eltávozik, a **2**. helyen pedig az összenyomhatatlanság (konkrétan a * egyenlet) miatt ugyanekkora ($CC'D'D=V=A_2v_2\Delta t$) térfogatú folyadék megjelenik. Emiatt, és amiatt, hogy az A’B’CD térben az áramlás stacionárius voltából kifolyólag semmi sem változott, a munkatétel alkalmazásánál úgy járhatunk el, mintha a kicsiny $m = \rho V$ tömegű folyadék egyszerűen az **1**. helyről a **2**.-re jutott volna. Ennél az elmozdulásnál az összes munka – súrlódás hiányában – a nehézségi erő és a nyomóerők munkájából tevődik össze. A nehézségi erő munkája $mg(h_1-h_2)$, a nyomóerők munkája pedig a A_1 és A_2 keresztmetszetnek $AA' = v_1\Delta t$ –vel, ill. $CC' = v_2\Delta t$ –vel való eltolásánál: $p_1A_1v_1\Delta t=p_1V$, ill. $-p_2A_2v_2\Delta t = -p_2V$. A munkatétel szerint tehát $\frac{1}{2}\rho V\left(v_2^2-v_1^2\right)=\rho Vg\left(h_1-h_2\right)+\left(p_1-p_2\right)V.$ Ebből V-vel való egyszerűsítés után adódik a <u>Bernoulli-egyenlet</u> **:** $p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2$,

azaz súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\acute{a}ll.$$

Ez az egyenlet az energia megmaradását fejezi ki. Emellett álló folyadék ($v=0$) esetén visszaadja a hidrosztatikai nyomás képletét.

<u>Alkalmazás:</u> folyadékok kiáramlása kis nyíláson (legyen ennek sebessége v_2 , a vízszint süllyedésének v_1), lásd az ábrán. Az edény alapterülete (A_1) sokkal nagyobb, mint a nyílás keresztmetszete (A_2), és mivel $A_1v_1=A_2v_2$, a v_1 sokkal kisebb, mint a v_2, így előbbit elhanyagoljuk. A felszínen és a nyílásnál is, ahol a folyadék érintkezik a külső levegővel, a nyomás egyenlő a külső légnyomással, $p_1=p_2$, ezzel egyszerűsítünk. A potenciális energia nulla szintjét a nyílás magasságától mérjük (vagyis $h_2=0$, $h_1=h$), ezzel a Bernoulli egyenlet a $\rho gh=\rho v^2/2$-re egyszerűsödik, ebből $v=\sqrt{2gh}$ (ugyanakkora, mintha a folyadék *h* magasságból szabadon esett volna, ezt 1646-ban vette észre Torricelli).