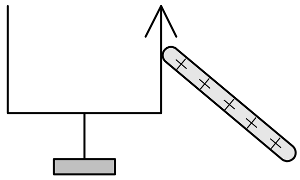
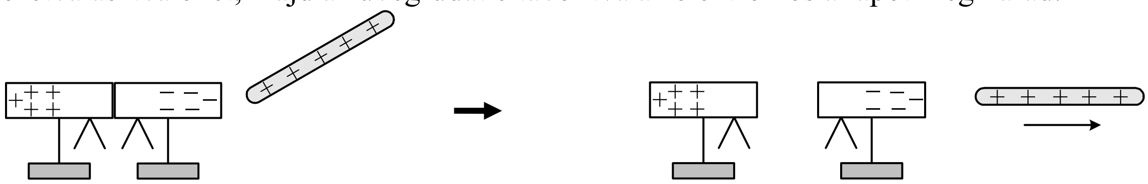
1. Elektrosztatika

Elektromos alapjelenségek: Bizonyos testek (borostyánkő, üveg, ebonit) megdörzsölve apró tárgyakat magukhoz vonzanak. A tapasztalat szerint két, bőrrel megdörzsölt apró üvegdarab között taszítás, egy bőrrel dörzsölt üveg és egy gyapjúval dörzsölt borostyánkő között vonzás lép fel. Az elektromos állapot érintéssel átvihető egyik testről a másikra. Ha a megdörzsölt üvegrudat hozzáérintjük szigetelőtalpon álló fémpohárhoz, akkor a fémpohár élén a piciny alufólia, mint egy elektroszkóp elektromos állapotot jelez, a taszító hatás miatt szétáll.



A megdörzsölt üvegrudat a fémpohárhoz érintve az elektromos állapot átadódik

Ha két összeillesztett fémtesthez megdörzsölt üvegrudat közelítünk a pozitív elektromos állapotú rúd hatására mindkét fémtest elektromos állapotba kerül. Az üvegrúd jelenlétében szétválasztva őket, majd az üvegrudat eltávolítva az elektromos állapot megmarad.



Az elektromos influencia, vagy megosztás jelensége

A fenti alapjelenségekből arra a következtetésre juthatunk, kétféle elektromos állapot van. Önkényesen a bőrrel megdörzsölt üvegdarabot pozitív elektromos állapotúnak nevezzük. A megdörzsölt testek körül úgynevezett elektromos mező jön létre.

Elektromos töltésnek nevezzük azt a mennyiséget, amely megmutatja, hogy a test milyen mértékben vesz részt az elektromos kölcsönhatásban. Az elektromos töltés jele Q. Amelyik testre ugyanabban a mezőben k-szoros erő hat, annak töltése is k-szoros. A töltés előjeles mennyiség. A tapasztalat szerint az egynemű töltések taszítják egymást, különnemű töltések vonzzák egymást. A töltés érintéssel átvihető az egyik testről a másikra. A semleges testen is van töltés de a $\oplus$ és – töltések egyforma mennyiségben vannak jelen.

Az elektromos töltés megosztható, a jelenség neve influencia. Ehhez az szükséges, hogy a töltéshordozók a testben makroszkopikusan elmozdulhassanak. Az olyan testeket, amelyekben a töltések erre képesek, elektromos vezetőknek hívjuk. Szigetelők esetén a töltések elmozdulása csak mikroszkopikus méretű, a molekula méretével azonos nagyságrendű, $10^{-9}-10^{-10}m$ lehet. Az ezzel kapcsolatos jelenséget polarizációnak nevezzük. Tapasztalataink szerint az elektromos töltés megmaradó mennyiség, nem keletkezhet, és nem tűnhet el.

Coulomb törvény: Coulomb mérései (1785) szerint két nyugvó pontszerű elektromos töltés között fellépő erő nagysága arányos a töltésekkel és fordítottan arányos a pontok távolságának négyzetével.

$$\boxed{F = k\frac{qQ}{r^2}}$$

A $k>0$ pozitív állandót Coulomb állandónak nevezzük, értéke a töltésegység megválasztásától függ. 1 Coulomb annak a pontszerű testnek a töltése, amely egy ugyanakkora töltésű, tőle vákuumban 1 m-re levő pontot $9\cdot 10^9 N$ erővel taszít. Ekkor k értéke: $k=9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$. A Coulomb állandó felírható a vákuum permittivitásával (ε_0) kifejezve:

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Ekkor természetesen $\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi k}$. Mivel az inerciarendszerben nyugvó ponttöltés mezője konzervatív, a szuperpozíció elve értelmében bármilyen, az inerciarendszerben nyugvó töltéselrendezés is konzervatív elektromos mezőt kelt, ezt elektrosztatikus mezőnek nevezzük.

Az elektromos mező jellemzése, térerősség: Az elektromos mező pontról pontra történő jellemzéséhez próbatöltéseket (pontszerű töltött testeket) használunk. A próbatöltésre ható erő a tapasztalat szerint arányos a töltésével, a két mennyiség hányadosa már független a próbatöltés töltésétől, kizárólag a mezőt jellemzi a pontszerű töltés helyén. Ezt nevezzük elektromos térerősség vektornak, jele $\vec{E}$. Magyarul az elektromos térerősség megadja a kérdéses pontba helyezett pozitív egységnyi töltésre ható erőt, irány és nagyság szerint. A tér jellemző iránya a pozitív töltésre ható erő irányával egyezik meg.

$$\vec{E}(P)=\frac{\vec{F}(P)}{q}$$

A térerősség mértékegysége: $[E]=1\frac{N}{C}=1\frac{V}{m}$

Ha két vagy több töltés létesíti a mezőt, akkor a térerősség az egyes töltések által külön-külön létesített mezőkhöz tartozó térerősségek vektori összege. Ez a <u>szuperpozíció</u> vagy független hatás elve, Newton negyedik törvényéből következik: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, azaz $q\vec{E}=q\vec{E}_1+q\vec{E}_2$, így

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

A feszültség és az elektrosztatikus mező első alaptörvénye: Az elektrosztatikus mezőben a két pont között a q próbatöltésen az elektromos mező által végzett munka:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}d\vec{r}=\int_A^B q\vec{E}d\vec{r}=q\int_A^B \vec{E}d\vec{r}\,.$$

<u>Definíció</u> szerint a két pont közötti <u>feszültség</u> az egységnyi próbatöltésen a két pont között a mező által végzett munka:

$$U_{AB}=\frac{W_{AB}}{q}=\int_A^B \vec{E}d\vec{r}$$

Homogén térben a térerősség-vektorral párhuzamos d nagyságú elmozdulás esetén ez a formula leegyszerűsödik:

$$\boxed{U=Ed}$$

Az elektromos (más elnevezésben: villamos) feszültség független a próbatöltéstől, csak a mezőre és a benne felvett két pontra jellemző. Az <u>elektromos feszültség</u> számértéke megmutatja, hogy <u>az elektromos mező az egységnyi pozitív töltésen mennyi munkát végez</u>, miközben az egyik pontból a másikba szállítja. Így a feszültség egysége 1V=1J/C.
Ismeretes, hogy konzervatív mezőben, ha kijelölünk egy kitüntetett A kezdőpontot, bármely másik (pl. B) pont jellemezhető azzal, hogy mekkora munkát végez az erő, ha a B-ből az A-ba megy a test. Ezt a munkát úgy hívjuk, hogy a test potenciális (vagy helyzeti) energiája a B

pontban. Az elektrosztatikus mező konzervatív, azaz ha a *q* töltés elmozdul az A pontból a B-be, a *mező által* végzett munka éppen a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével egyenlő.

$$W_{A,B}=\int_A^B \vec{F}d\vec{r}=E_{\mathrm{p}}(A)-E_{\mathrm{p}}(B)$$

Az egységnyi töltésre jutó potenciális energiát az elektromos mezőben potenciálnak nevezzük.

$$U=\frac{E_{\mathrm{p}}}{q},$$

Az elektrosztatikus mezőben a feszültség egyben a potenciálkülönbség is.

$$U_{A,B}=\int_A^B \vec{E}d\vec{r}=U(A)-U(B)$$

Az elektrosztatikus potenciál egy állandó erejéig határozatlan. Megállapodás szerint a potenciált sokszor a végtelenben vesszük zérusnak: $U(\infty)=0$. Ekkor:

$$U(P)=\int_P^\infty \vec{E}d\vec{r}$$

Vagyis egy tetszőleges pont potenciálja megmutatja, hogy mennyi munkát végez az elektrosztatikus mező, amíg az egységnyi pozitív töltést a tér P pontjából a végtelenbe szállítja. A pozitív töltésekre az alacsonyabb feszültségű hely, a negatív töltésekre a magasabb feszültségű hely felé irányuló elektromos erő hat. Előbbi annak felel meg, hogy egy tömegpontra a Föld gravitációs terében lefelé irányuló erő hat, ha ennek hatására elmozdul a tömegpont, potenciális energiája csökken. Negatív tömeg nincs, a taszításnak nincs gravitációs megfelelője.

Az elektromos esetben is érvényes az a múlt félévben tanult összefüggés, hogy minél nagyobb a potenciális energia egységnyi hosszra eső változása, annál nagyobb erő hat, pontosabban: $\vec{\mathrm{F}}=-\mathrm{grad}\mathrm{E}_{\mathrm{p}}$, tehát az erő abban az irányban hat, amerre a leggyorsabban csökken a potenciális energia. Most ezt a térerősség és a potenciál közötti összefüggésre is felírhatjuk:

$$\vec{\mathrm{E}}=-\mathrm{grad}\mathrm{U}$$

Példa: Elektrosztatikus potenciál $U=u_o(3x+4z)$ módon függ a helykoordinátáktól, $u_o=2$ V/m. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség az origóban és a (2, 1, 0) pontban. Milyen alakúak az ekvipotenciális felületek?

Megoldás: A fenti képletet használva, az u_0 konstanst a deriválásból kiemelve

$$\vec{\mathrm{E}}=-\mathrm{u}_0\mathrm{grad}\left(3\mathrm{x}+4\mathrm{z}\right)=-\mathrm{u}_0\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=-6\vec{\mathrm{i}}-8\vec{\mathrm{j}}$$

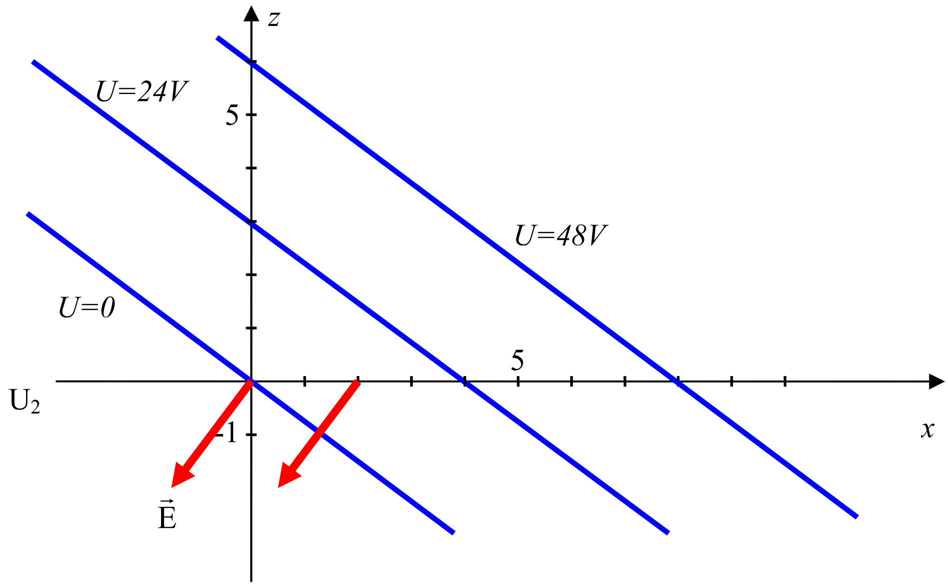
Azt kaptuk, hogy a térerősség független a helytől, tehát az origóban és a (2, 1, 0) pontban is ugyanaz. Az ekvipotenciális felületeket úgy kapjuk, hogy a potenciál-függvényt egy konstanssal tesszük egyenlővé:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{o}}(3\mathrm{x}+4\mathrm{z})=\mathrm{C}$$

Ebből a z-t kifejezve:

$$\mathrm{z}=\frac{\mathrm{C}}{4\mathrm{u}_{\mathrm{o}}}-\frac{3}{4}\mathrm{x}$$

Ez lényegében ax+b alakú, tehát egy C-től függő egyenes egyenlete. Ábrázoljuk az xz koordináta rendszerben (az y változó most érdektelen).



Az ábrán kék vonalak jelzik az ekvipotenciális felületeket. Az origón átmenő vonalat pl. úgy kapjuk, hogy a C helyébe nullát írunk. Ellenőrzésként a többi vonalnál írjuk e a tengelymetszetek koordinátáit a fenti egyenletbe, hogy kijön-e feszültségnek az az érték, ami az ábrán szerepel. A vastag piros nyíl a térerősséget ábrázolja (nem méretarányosan). Látható, hogy merőleges az ekvipotenciális felületre.

Mivel az elektrosztatikus mező konzervatív, benne bármely zárt görbén végzett munka nulla, azaz bármely zárt vonal mentén a feszültségesések összege zérus.

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_1 = 0$$

Az elektrosztatikus mező I. alaptörvénye tehát: $\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, vagyis ha egy zárt görbén végigmegy a próbatöltés, a mező összesen nulla munkát végez. Ennek a törvénynek a differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = 0$. Hangsúlyozzuk, hogy ez a törvény általánosan csak a sztatikus esetben érvényes, ahol az elektromos mezőt álló töltések hozzák létre. (Ha a töltések mozognak, az érvényességnek további feltételei vannak. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy akkor érvényes, ha a mozgó töltések nem hoznak létre változó mágneses mezőt, tehát pl. az egyenáram esetében.). Az elektrosztatikus mező I. alaptörvényéből kapjuk a Kirchhoff-féle huroktörvényt: bármely zárt görbén végighaladva a feszültségesések előjele összege nulla:

$$\sum \mathrm{U} = 0$$

Ennek különösen az áramköröknél lesz nagy jelentősége.

Ponttöltés elektromos mezője és potenciálja: Felhasználjuk, hogy $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ és $\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$

Ezekből a Q ponttöltés okozta elektromos térerősség nagysága:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

A ponttöltés potenciálja attól r távolságra:

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = kQ\int_r^\infty \frac{1}{r^2} d\vec{r} = kQ\left[\frac{-1}{r}\right]_r^\infty = \frac{kQ}{r}$$

Kapacitás, kondenzátorok: Ha egy vezetőben elektromos tér van jelen, az a szabad töltéshordozókat rendezett mozgásra készteti, elektromos áram jön létre. Sztatikai állapot akkor állhat be, ha a vezetőben nincs elektromos mező és a térerősség nulla, egyébként a szabad elektronok rendezetten mozognának. A vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E}=0$. Ezt azt is jelenti, hogy sztatikus esetben a vezető bármely két pontja között a potenciálkülönbség nulla, az egész vezető ugyanazon a potenciálon van, idegen szóval ekvipotenciális tartomány. Kérdés, hogyan függ egy magányos vezető potenciálja a rá felhordott töltéstől. A szuperpozíció elve miatt, ha a vezető töltését megkétszerezzük, akkor a tér minden pontjában az $\vec{E}$ elektromos térerősség is a kétszeresére nő. Ennek megfelelően a vezető potenciálja is a duplájára nő. Tehát a vezető potenciálja egyenesen arányos a vezetőre vitt töltéssel, így a hányadosuk állandó. Ezt a hányadost *C*-vel jelöljük és a vezető kapacitásának nevezzük. Definíció:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$

A kapacitás mértékegysége a Farad: 1F=1C/V.
Számoljuk ki egy magányos *R* sugarú vezető gömb kapacitását (a végtelen távoli pontokat választva nulla potenciálúnak). Felhasználjuk azt a később bizonyítandó állítást, hogy egy töltött gömb potenciálja megegyezik a ponttöltés potenciáljával: $U(R)=k\frac{Q}{R}$, így a kapacitása:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{k\frac{Q}{R}}=\frac{R}{k}=4\pi\varepsilon_0 R$$

Ha felhasználjuk a Coulomb állandó értékét, akkor beláthatjuk, hogy a hétköznapi méretű testek vákuumbeli kapacitása igen kicsi: A kapacitás megnövelésének egyik lehetséges módja az, hogy a feltöltött vezető közelébe egy másik földelt vezetőt helyezünk. Ilyenkor a potenciál lecsökken, a kapacitás pedig nő. A kondenzátor két vezető test (az armatúrák vagy fegyverzetek) amelyek dielektrikummal vannak elszigetelve egymástól. A pozitív fegyverzetről induló indukcióvonalak a negatív fegyverzeten végződnek, a két fegyverzet töltése ellentetten egyenlő. Az elrendezés kapacitása a pozitív fegyverzet töltésének és a két fegyverzet közötti potenciálkülönbségnek a hányadosa: C=Q/U.

Kondenzátorok kapcsolása, eredő kapacitás: Tegyük fel, hogy sorosan kapcsolunk két kondenzátort (kapacitásuk C_1 és C_2) pl. egy U feszültségű telepre. Ekkor a két kondenzátor U_1 és U_2 feszültségre töltődik fel, ahol a huroktörvény miatt $U_1+U_2=U$. A kondenzátorok töltése $Q_1= C_1U_1$ és $Q_2= C_2U_2$ lesz. Az eredő kapacitás azt jelenti, hogy a két kondenzátort gondolatban kicseréljük eggyel, úgy, hogy a kondenzátorokon kívül semmi sem változik, azaz a töltés és a feszültség is állandó. Az eredő kondenzátornak nyilván U lesz a feszültsége. A feltöltődés során a telep negatív sarkából elektronok gyűlnek a C_1 megfelelő lemezére Q_1 összetöltéssel. Ezek a C_1 másik lemezéről eltaszítanak ugyanannyi elektront, amelyek C_2 lemezen gyűlnek össze és szintén eltaszítanak ugyanennyi elektront a másik fegyverzetről, amely visszamegy az áramforrásba, annak pozitív sarkába. Ebből két következtetést vonhatunk le: egyrészt $Q_1=Q_2$, másrészt a telep sarkai között csak Q_1 töltés áramlott (a kondenzátorok közötti töltésmozgás kívülről nézve lényegtelen), tehát $Q_e= Q_1$. A $U_1+U_2=U$ összefüggésbe behelyettesítve a feszültségeket $\frac{Q_e}{C_e}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}$, a töltésekkel egyszerűsítve kapjuk az eredő kapacitásra:

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

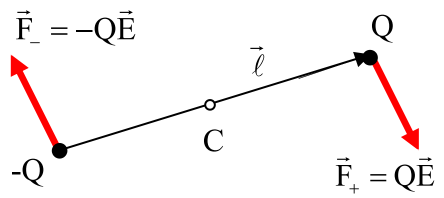
A töltések egyenlőségéből kapjuk, hogy $C_1U_1=C_2U_2$, azaz $\frac{C_1}{C_2}=\frac{U_2}{U_1}$, magyarul hogy a feszültség fordított arányban oszlik meg a kapacitások között.

Párhuzamos esetben könnyen látható, hogy a feszültségek megegyeznek: $U_1=U_2=U$ (huroktörvény), másrészt a telepből kiáramló elektronok egyik része az egyik, másik része a másik kondenzátorra megy, azaz $Q_e= Q_1+Q_2$. Ez utóbbiba beírva a töltések $Q_e= C_eU$, $Q_1= C_1U_1$ és $Q_2= C_2U_2$ kifejezéseit, kapjuk, hogy $C_eU=C_1U_1+C_2U_2$, a feszültségekkel egyszerűsítve adódik az eredő kapacitás: $C_e=C_1+C_2$. A feszültségek egyenlőségéből látszik, hogy $\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_2}{C_2}$, átrendezve $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{C_1}{C_2}$, tehát a töltés a kapacitással arányosan oszlik meg.

Elektromos dipólus: Az elektromos dipólus egy pozitív *Q* ponttöltésből és egy ugyanolyan nagyságú negatív ponttöltésből (-*Q*) áll, melyek távolsága ℓ. Ha ℓ kicsiny a feladatban előforduló egyéb távolságokhoz képest, akkor pontszerű dipólusról beszélünk. A dipólusnyomaték, vagy dipólusmomentum definíciója:

$$\vec{p}=Q\vec{\ell}$$

Gyakran töltések bonyolultabb rendszere, (pl. molekulák) is dipólussal helyettesíthető. Határozzuk meg a pontszerű dipólusra ható eredő erőt és forgatónyomatékot homogén külső elektromos mezőben:



Dipólusra ható forgatónyomaték külső elektromos mezőben

A negatív és a pozitív töltésre ható erők: $\vec{F}_-=-Q\vec{E}$ és $\vec{F}_+=Q\vec{E}$, tehát homogén térben a dipólusra ható eredő erő nulla. A C pontra a forgatónyomaték:

$$\overrightarrow{M}_C=-\frac{\vec{\ell}}{2}\times\left(-Q\vec{E}\right)+\frac{\vec{\ell}}{2}\times Q\vec{E}=Q\vec{\ell}\times\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E},$$

A forgatónyomaték vektora (vagyis szabad dipólus esetén a forgástengely) tehát merőleges mind a dipólus tengelyére, mind a térerősségre. A konkrét példában az ábra síkjába befelé mutat, azaz a dipólus az óramutató járásával megegyező irányban fordul el. Ez a forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{p}\parallel\vec{E}$ vagyis a dipólus befordult a tér irányába, vagy pedig azzal pont ellentétesen áll. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ egyirányú, akkor $\vec{M}_C=0$, és az egyensúlyi helyzet stabil, vagyis kitérítve a dipólust ebből a helyzetből a létrejövő nyomaték igyekszik visszaforgatni abba. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ pont ellentétes irányú, akkor bár a nyomaték nulla, de az egyensúlyi helyzet instabil. Ilyen esetben, ha a dipólust kitérítjük, akkor a létrejövő nyomaték a stabil egyensúlyi helyzet felé próbálja forgatni.

A forgatónyomatékra kapott összefüggés kis közelítéssel inhomogén térben is érvényes. Azonban, ha a tér nem homogén, a dipólusra nem csak forgatónyomaték, hanem zérustól különböző eredő erő is hat. Legyen a negatív töltés helyén a térerősség $\vec{E}$, a pozitív töltés helyén $\vec{E}+\Delta\vec{E}$. Ekkor az eredő erő $\vec{F}_e=-Q\vec{E}+Q(\vec{E}+\Delta\vec{E})=Q\Delta\vec{E}$, vagyis $\vec{F}_e$ az inhomogenitás mértékétől függ, a tér változási gyorsaságával (pontosabban a gradiensével) egyenesen arányos.

Elektromos polarizáció: Szokás bevezetni a tömegközéppont analógiájára a töltés-középpontot.

$$\vec{r}_{tkp}=\frac{\sum Q_i\vec{r}_i}{\sum Q_i}$$

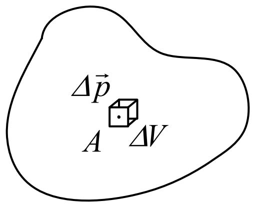
Pl. egy molekulán belül külön értelmezhetjük a pozitív és negatív töltések töltésközéppontját. Azokat a molekulákat, amikben a pozitív és negatív töltések töltésközéppontja egybeesik, apoláris molekuláknak nevezzük, ilyenek például a H_2, O_2 molekulák. Ha a töltésközéppontok nem esnek egybe, akkor poláris molekulákról beszélhetünk: $HCl, CO_2, H_2O...$, ezeket kicsiny dipólusokként modellezhetjük.

Az alkalmazott elektromos mező hatására a szigetelő anyag polarizálódik. Indukált polarizáció esetén az alkalmazott elektromos mező, az egybeeső töltésközéppontokat széthúzza így a molekula dipólussá válik, illetve ha a molekulának már eleve volt valamekkora dipólnyomatéka, akkor az megnő. Az $\vec{E}$ elektromos térerősség a ⊕ töltést a tér irányában, míg a – töltést azzal ellentétesen mozdítja el. A jelenség tehát poláros és apoláros molekulák esetén egyaránt fellép. Ionrácsok esetében az elektromos mező az ellentétes töltésű ionokra ellentétes irányú erővel hat, ez is növeli a polarizációt.

A polarizáció másik típusa a rendeződési (vagy orientációs) polarizáció. Ez a jelenség csak poláros molekulájú anyagokban fordulhat elő. Az elektromos mező a dipólus molekulákat a saját irányába forgatja be, annál inkább minél erősebb a tér és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ez tehát erőteljesen hőmérsékletfüggő, szemben az indukált polarizációval.

Az elektromos polarizációvektor: Vákuumban az elektromos mező leírására egyetlen vektor, az $\vec{E}$ térerősség-vektor elegendő. Kémiai anyagban azonban egy további vektor bevezetése szükséges, amely az anyag polarizáltságának mértékét adja meg.

Tekintsünk egy szigetelőanyagot vagy dielektrikumot, egy tetszőleges pontja legyen A. Jelölje az A pont körüli kicsiny térfogatelemet ΔV, és legyen $\Delta\vec{p}$ a ΔV térfogatban foglalt molekulák dipólusnyomatékának eredője.



Az anyag elektromos polarizálódása

Ekkor az A pont körüli kicsiny térfogat átlagos polarizáltságát a polarizációvektorral jellemezhetjük:

$$\vec{P}(A) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}.$$

A polarizációvektor mértékegysége a C/m^2. A tapasztalat szerint az anyagok nagy részére jó közelítéssel fennáll az alábbi lineáris anyagegyenlet:

$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E},$$

vagyis minél erősebb az elektromos mező, annál erősebben polarizálódik az anyag. A χ dimenziótlan arányossági tényezőt dielektromos szuszceptibilitásnak nevezzük. Ennek értéke vákuum esetén nulla, szigetelőanyagban pedig pozitív $\chi > 0$. Ha a térerősség nagy, akkor a szigetelő vezetővé válhat, (ezt a térerősséget átütési szilárdságnak nevezzük,) ilyenkor a fenti egyenlet érvényessége megszűnik, az összefüggés tehát nem lehet minden körülmények között jó. Másrészt ismerünk olyan anizotrop kristályokat, melyekben a térerősség vektor nem párhuzamos a polarizációvektorral, a fenti egyenlet természetesen ekkor sem igaz.

Elektromos indukcióvektor, és az elektrosztatika második alaptörvénye: Célszerű bevezetni az elektromos indukcióvektort a térerősség vektor és a polarizációvektor segítségével. Ennek a lineáris kombinációnak a bevezetését az indokolja, hogy vele egyszerű alaptörvény írható fel. Legyen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

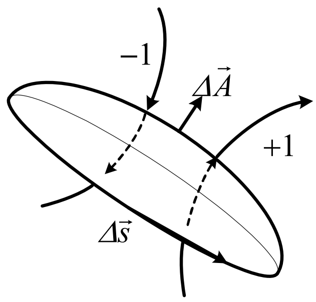
mértékegysége pedig a C/m^2. Ha felhasználjuk az első közelítést, akkor

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi\right) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E},$$

ahol $\varepsilon_r = 1 + \chi$ a relatív permittivitás, amely megadja, hányszor nagyobb az illető szigetelő vagy dielektrikum permittivitása a vákuuménál, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ pedig az abszolút permittivitás.

Az elektromos mező szemléltetésére az indukcióvonalakat használhatjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek az érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli elektromos indukcióval. Az elektromos fluxus (Ψ) mindig irányított felületre vonatkozik, és számértéke megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát. Amennyiben az indukcióvonal a felületelem vektorral megegyező irányban döfi a felületet, akkor az +1 járulékot ad, ha ellenkező irányban, akkor –1 a járuléka.



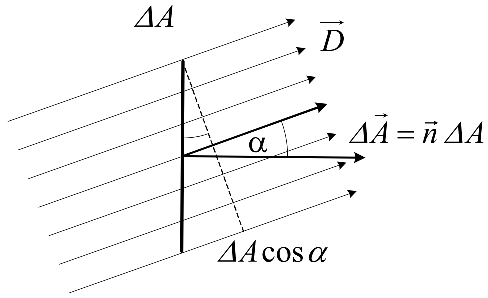
A peremgörbe és a felületi normális irányítása, a felületet döfő indukcióvonalak

Tekintsünk ΔA felületet, és számítsuk ki a felületre az elektromos indukció-fluxust. A felületvektor $\Delta\vec{A}$, zárjon be α szöget az indukcióvektorral. Ha ΔA elegendően kicsiny, akkor az indukció már homogénnek tekinthető, és az elemi kicsiny indukció-fluxus:

$$\Delta\Psi = D \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = \vec{D}\Delta\vec{A}$$

Egy tetszőleges A felületre pedig integrálással kaphatjuk meg a fluxust:

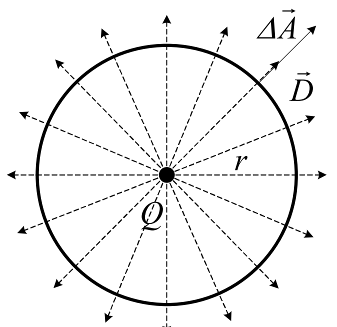
$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$



Indukció-fluxus a ΔA felületre

Felhasználva, hogy a indukció mértékegysége C/m^2, az indukció-fluxus mértékegysége C (ugyanaz a Coulomb, mint a töltésé).

Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mezőt keltő töltés és a kialakult mező indukcióvektora között. Ennek megválaszolására tekintsünk egy vákuumban elhelyezett ponttöltést, és számoljuk ki a fluxusát egy zárt felületre, amely legyen egy r sugarú koncentrikus gömb.



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület koncentrikus gömb

Látható, hogy ha feltesszük, hogy az indukcióvonalak forrása csak a töltés lehet, (a vákuum miért is lenne forrás?) akkor akármilyen nagyra választjuk a gömb sugarát, a gömbfelületen ugyanazok a vonalak mennek át, tehát a fluxus nem függ a felület nagyságától, csak a töltéstől. Mivel kétszer nagyobb sugárhoz négyszer nagyobb felület tartozik, ahhoz, hogy Ψ ugyanakkora maradjon, az indukciónak, és így a térerősségnek kell negyedére csökkennie, ez pedig pont a Coulomb törvény lényege. Vezessük le most fordítva precízebben:
Mivel a ponttöltés által keltett térerősség ismert:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

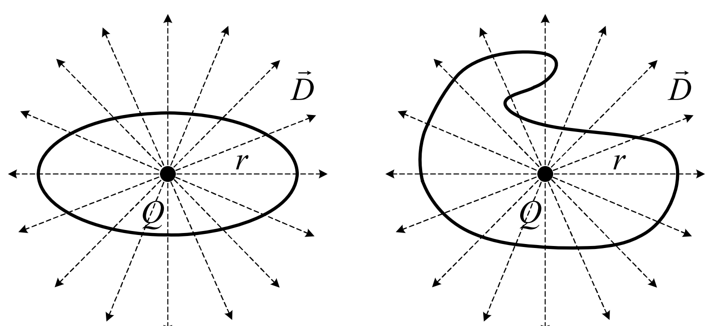
az elektromos indukciót egyszerűen kapjuk a térerősségből: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, ezzel

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \,.$$

Így a zárt felületre a fluxus egyenlő a felületen belüli töltéssel:

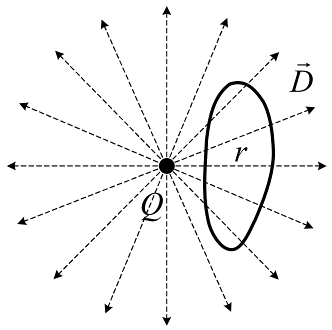
$$\overset{0}{\Psi} = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} dA = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \oint_A dA = \frac{Q}{4r^2\pi} 4r^2\pi = Q$$

A számolást az a tény egyszerűsítette le, hogy az indukcióvektor nagysága mindenütt ugyanakkora, mivel csak a töltéstől mért *r* távolságtól függ, az pedig a gömbfelületen állandó. Az eredmény viszont akkor is változatlanul érvényes, ha a *Q* töltést körülölelő zárt felület nem egy koncentrikus gömb, hiszen bármely a *Q* töltést magába foglaló zárt felületre a fluxus ugyanennyi, mivel a *Q*-ból kiinduló összes indukcióvonal átdöfi a *Q*-t magába foglaló zárt felületet. Ezt mutatják a következő ábrák.



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület

Ha a felület nem foglalja magába a *Q* töltést, akkor a fluxus nulla. Ahol az indukcióvonal bemegy ott –1 a járulék, ahol kijön ott +1.



Ha a zárt felület nem foglalja magába a Q töltést, akkor a fluxus nulla

Tapasztalat szerint tetszőleges töltéselrendezés estén és kémiai anyag jelenlétében is igaz, hogy zárt rögzített felületre az elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt összes töltéssel.

$$\int_A \vec{D}d\vec{A} = Q$$

A fenti egyenlet az elektrosztatika II. alaptörvénye, gyakran Gauss törvénynek nevezik. *Q* a *V* térfogatban foglalt töltések algebrai összegét jelenti, *A* pedig a *V* térfogat burkoló felülete. Az elektromos indukcióvonalak forrásai a pozitív töltések, nyelői pedig a negatív töltések, más szóval az indukcióvonalak a pozitív töltésen erednek és a negatív töltésen végződnek. A Gauss törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$.

Fontos megemlíteni, hogy a $\vec{D}$ értéke nem függ attól, hogy vákuumban vagyunk vagy szigetelő közegben, mivel csak a valódi, azaz nem polarizációval létrejött töltés működik forrásként. A térerősség viszont módosul a Coulomb törvénnyel együtt:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qQ}{r^2}$$

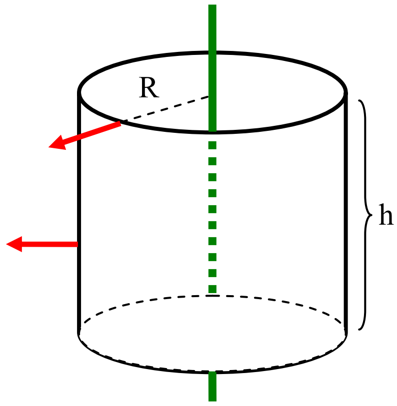
Példa: Ahogy a fentiekből látható, ponttöltés elektromos tere könnyen adódik a Gauss-törvényből is. Ehhez egyszerűen egy olyan R sugarú gömbfelülettel kell képzeletben körbevenni a ponttöltést, amely középpontjában a töltés ül, ekkor a szimmetria-tulajdonságokat kihasználva Gauss törvényében a felületi integrál kiszámítása szorzássá egyszerűsödik: $\varepsilon_0 E 4\pi R^2 = Q$.

Vegyük észre azonban, hogy itt sehol sem használtuk ki, hogy a ponttöltés pontszerű, még azt sem, hogy kicsi a mérete, csupán azt, hogy gömbszimmetrikus töltéseloszlás és hogy a választott képzeletbeli gömbfelületen belül van az összes töltés (tehát a töltések távolsága a középponttól nem nagyobb, mint R), a középpontok pedig egybeesnek. Tehát bármilyen gömbszimmetrikus töltéseloszlás erőtere kívülről úgy néz ki, mintha az összes töltés a középpontba lenne koncentrálva. Speciálisan igaz ez térfogatában egyenletesen töltött r sugarú gömbre, valamint a felületén egyenletesen töltött r sugarú gömbhéjra, ha $r \le R$.

Továbbmenve, ha ez utóbbi gömbön kívül a térerősség mindenhol helyettesíthető a ponttöltés által keltett térrel, akkor, ha integráljuk ezt a térerősséget R-től a végtelenig, nem lesz különbség, vagyis a gömbön kívül a potenciál is megegyezik a két esetben. Végül megkaptuk a töltött gömb kapacitásának levezetésénél használt állítást: egy Q töltésű R sugarú fémgömb potenciálja (ez egy érték, mivel ekvipotenciális a fémdarab) megegyezik egy Q ponttöltés által keltett tér potenciáljával a töltésről R távolságba: $\mathrm{U} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$

Példa: hosszú töltött fonál elektromos tere. Adjuk meg a végtelen hosszúságú, egyenletes λ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes fonál elektromos terének erősségét és potenciálját!

Vegyünk fel az egyszerűség kedvéért olyan koordináta-rendszert, ahol a töltött fonál a z tengellyel esik egybe. Ekkor szimmetria-okokból a térerősségnek nem lesz z komponense, hanem az x-y síkban sugárirányban kifelé (negatív töltés esetén befelé) mutat. Akkor használhatjuk könnyedén a Gauss-tételt, ha olyan felületet találunk, amely mentén a (piros nyíllal jelölt) térerősség nagysága és a felülettel bezárt szöge állandó. Próbálkozzunk egy hengerpalásttal.



A henger alap- és fedőlapján a térerősség-vektor a felülettel párhuzamos, a felület normálisával 90^o-os szöget zár be, vagyis ott a felületi integrál eltűnik. Integráljunk a palástra:

$$\oint_{pal.} \vec{D}d\vec{A} = \oint_{pal.} \varepsilon E dA = \frac{1}{4\pi k} E \oint_{pal.} dA = \frac{1}{4\pi k} E 2R\pi h = Q = \lambda h$$

amiből: E= $\dfrac{2k\lambda}{R}$, tehát a térerősség a távolság reciprokával csökken. Mivel sehol sem használtuk ki, hogy a fonál vékony, az eredmény érvényes tetszőleges hengerszimmetrikus töltéseloszlás, pl. térfogatában egyenletesen töltött R sugarú henger, valamint a felületén egyenletesen töltött R sugarú hengerpalást terére tőle r távolságban, ha $r \leq R$ A potenciál számításánál vékony fonál esetén a nulla szint megválasztása jelent problémát. Ha a fonálnál lenne a nulla szint, akkor ott végtelen lenne a térerősség. Ha a végtelenben választanánk a nullát, akkor pedig a potenciál lenne végtelen, mint ahogy azt mindjárt látni fogjuk. Tegyük fel, hogy valamilyen tetszőlegesen választott, majd rögzített R_0 távolságra vesszük a nulla szintet és integráljunk tetszőleges R-től R_0-ig:

$$U(r) = \int_R^{R_0} \vec{E}d\vec{r} = 2k\lambda \int_R^{R_0} \frac{1}{r} dr = 2k\lambda \left[\ln r\right]_R^{R_0} = 2k\lambda \ \ln(\frac{R_0}{R})$$

5.* Határozzuk meg az η felületi töltéssűrűségű végtelen, az *x-y* síkban elhelyezkedő sík lemez által keltett elektromos térerősséget és potenciált! (Mego.: $U=-\eta/(2\varepsilon_o)\cdot|z|$, $\mathbf{E}=\eta/(2\varepsilon_o)\cdot\mathbf{e}_z$)

Példa: Vizsgáljuk meg a Q ponttöltés elektromos terének tulajdonságait. Legyen az egyszerűség kedvéért a töltés az origóban. Ekkor a térerősség iránya egy adott (x,y,z) pontban megegyezik az origóból a pontba húzott helyvektor irányával. A térerősség komponensei:

$E_x = \dfrac{kQ}{r^3}x$, $E_y = \dfrac{kQ}{r^3}y$, $E_z = \dfrac{kQ}{r^3}z$, ahol a nevező függ mindhárom koordinátától:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A Pithagorasz tételt alkalmazva visszakapjuk a korábban levezetett térerősség-vektor nagyságát: $E = \dfrac{kQ}{r^2}$.

Számoljuk ki először a divergenciát, ehhez a megfelelő parciális deriváltak kellenek.

$$\partial_x E_x = kQ\left(\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot x}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right),$$

ha $r \neq 0$. A $\partial_y E_y$ és a $\partial_z E_z$ deriváltakat is hasonlóan kapjuk (csak az x-eket kell y-ra és z-re kicserélni). A divergencia a három derivált összege:

$$div\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{kQ}{r^3}\left(3-3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)=0$$

Azt az eredményt kaptuk, hogy ponttöltés elektromos tere a töltésen kívül forrásmentes. Ez a Gauss-tétel differenciális alakjára ránézve nem meglepő.
A rotáció számítása:

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = \det\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \mathrm{E_x} & \mathrm{E_y} & \mathrm{E_z} \end{pmatrix} = (\partial_y \mathrm{E_z} - \partial_z \mathrm{E_y})\vec{\mathrm{i}} + (\partial_z \mathrm{E_x} - \partial_x \mathrm{E_z})\vec{\mathrm{j}} + (\partial_x \mathrm{E_y} - \partial_y \mathrm{E_x})\vec{\mathrm{k}}$$

Először a vegyes parciálisokat kell kiszámolni. Mivel a koordináták egymástól függetlenek, csak a nevezőket kell deriválni:

$$\partial_y E_z = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2y\cdot z}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5} \quad \text{és} \quad \partial_z E_y = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2z\cdot y}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5}.$$

Látható, hogy az egy zárójelben lévő vegyes parciálisok megegyeznek, egymásból kivonva őket, nullát kapunk, tehát ponttöltés tere (és ezzel bármilyen sztatikus töltés-elrendezés tere) örvénymentes.
Abban a pontban, ahol a ponttöltés elhelyezkedik, a töltéssűrűség végtelen, a térerősségnek szingularitása van, a deriváltak nem értelmezhetőek.

Határfeltételek (peremfeltételek) az elektrosztatikában: Tekintsük két különböző közeg határfelületét. Az elektrosztatika első alaptörvényének felhasználásával $\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$, be lehet bizonyítani, hogy az elektromos térerősség érintő irányú összetevője a határfelületen folytonosan megy át:

$$E_{t_2} = E_{t_1}.$$

E_{t2} a térerősség tangenciális komponense a határon, de még a 2-es közegben, E_{t1} pedig a térerősség tangenciális komponense a határon, de az 1-es közegben.
Az elektrosztatika második alaptörvényének segítségével, $\int_A \vec{D}d\vec{A} = Q$, az elektromos indukcióvektor normális komponensére lehet feltételt levezetni. Ilyenkor

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma.$$

Az elektromos indukcióvektor normális komponense két közeg határán ugrást szenved, és az ugrás mértéke éppen a felületi töltéssűrűség, melynek definíciója:

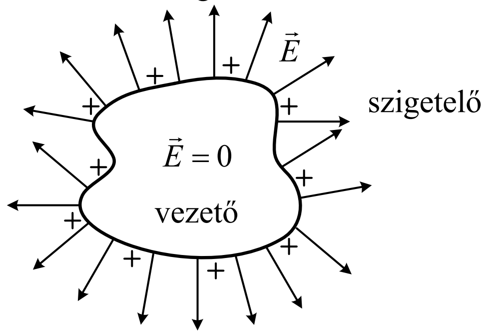
$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

D_{n2} az indukcióvektor normális komponense a határon, de a 2-es közegben, D_{n1} pedig az indukcióvektor normális komponense a határon, de az 1-es közegben

Vezetők az elektrosztatikus mezőben: Mint már említettük, a vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E}=0$, a vezető ekvipotenciális tartomány. Ez az állítás akkor is igaz, ha a vezető belsejében üregek vannak., feltéve, hogy az üreg belsejében nincsenek elszigetelt töltések.

Azt a tényt, hogy zárt fémburkolattal (vagy sűrű szövésű fémhálóval – úgynevezett Faraday-kalitkával) körülvett térrészbe az elektromos erőtér nem hatolhat be, felhasználják arra, hogy érzékeny elektromos berendezéseket a külső, zavaró elektromos hatásoktól, pl. villámcsapástól megvédjenek. Az eljárás neve elektrosztatikai árnyékolás.

Ha $\vec{E}=0$, akkor térerősség tangenciális komponense is nulla. Mivel $\vec{E}$ tangenciális összetevője nem ugrik két közeg határfelületén, a vezetőt határoló szigetelőanyagban a felület mentén az elektromos térerősségnek tangenciális összetevője nincs, vagyis a vezető körül a szigetelőben a térerősség mindenütt merőleges a vezető felületére.



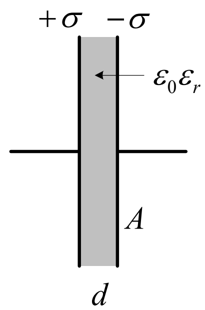
Elektromos térerősség a vezetőben, és a környező szigetelőben, sztatikus állapotban

Tekintve, hogy a vezetőben a térerősség nulla $\vec{E}=0$, így az elektromos indukció is nulla $\vec{D}=0$. Ebből az is következik, hogy a vezető belsejében, sztatikus esetben térfogati többlettöltés nem lehet $\rho=0$. Ez az állítás az elektrosztatika második alaptörvényéből következik. A vezetőre vitt töltés a vezető külső felületére húzódik. A határfeltételi egyenlet szerint $D_{n2}-D_{n1}=\sigma$, de a vezetőben az indukció nulla $D_{n1}=0$, így

$$D_{n2}=\sigma .$$

Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a vezető mentén, de már a szigetelőben az elektromos indukció értéke éppen a vezető felületi töltéssűrűségével egyezik meg.

Síkkondenzátor kapacitása:. Jelölje *d* a síkkondenzátor fegyverzetei között lévő távolságot. Legyen d jóval kisebb, mint a lemezek bármely lineáris mérete.



A síkkondenzátor

A két fegyverzet között az elektromos indukció $D=\sigma$, ebből $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$. A potenciál-különbség a fegyverzetek között $U=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d$, a síkkondenzátor kapacitása tehát:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$$

Az elektrosztatikus mező energiája: Tekintsünk egy kondenzátort, melynek kapacitása *C*. Töltsük fel 0-ról *Q*-ra. Egy közbülső állapotban jelölje a pillanatnyi állapot töltését *q* és a fegyverzetek közötti feszültséget u. Egy kicsiny Δq töltést szállítsunk át az egyik lemezről a másikra. Mivel az egységnyi töltésen végzett munka a feszültség, így a végzett munka $\Delta W = u\Delta q$. Mivel $C = \frac{q}{u}$, így a végzett munka miközben a kicsiny Δq töltést átszállítjuk: $\Delta W = \frac{q}{C}\Delta q$. Az összes végzett munka a kondenzátor teljes feltöltése során:

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

így <u>a kondenzátor energiája</u>:

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

A kapacitás definíciójának felhasználásával ez átírható más alakokba is: $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$.

Mivel úgy tekintjük, hogy ezt az energiát a lemezek közti elektromos tér hordozza, felmerül a kérdés, hogy mennyi energia van a mező egységnyi térfogatában. Tekintsünk egy síkkondenzátort, a kondenzátor belsejében a szélektől eltekintve a mező homogénnek tekinthető.

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\sigma A\cdot Ed = \frac{1}{2}DE\cdot Ad = \frac{1}{2}DE\cdot V ,$$

Ahol felhasználtuk a következő, korábban említett összefüggéseket: $\sigma = \frac{Q}{A}$, $D = \sigma$, $V = Ad$, és $E = \frac{U}{d}$. Az elektromos mező <u>energiasűrűsége</u> megmutatja, mennyi energia van egységnyi térfogatban: $w = \frac{W}{V}$, a mértékegység nyilván J/m^3. A fenti levezetés szerint az elektromos mező energiasűrűsége:

$$w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$$

Ez a kifejezés nem csak sztatikus esetben igaz. Ha a tér egy tetszőleges pontjában az elektromos térerősség $\vec{E}$ és az indukcióvektor $\vec{D}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\Delta V$ elektromos energia található. Egy véges V térfogatban pedig $W = \int_V w\,dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E}\,dV$.

Megjegyzés: a síkkondenzátor energiáját egy másik, (szintén tanulságos) módon is ki lehet számolni. Ha az egyik (pl. baloldali) fegyverzet által a másikra (pl. a jobboldalira) kifejtett erőt az F=QE definíció és az $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ képletből automatikusan kiszámoljuk, a valóságosnál kétszer nagyobb erőt kapunk (mivel a térerősséget felerészben a baloldali, felerészben pedig a jobboldali lemez kelti, utóbbi pedig nem fejthet ki erőt önmagára). Így azt kapjuk, hogy $F = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$, vagyis az erő független a lemezek d távolságától (persze csak ameddig a közelítéseink – pl. hogy a térerősség homogén - érvényesek). Ha $d=0$, akkor a kondenzátornak nincs (elektrosztatikus) energiája. Kezdjük el most távolítani a lemezeket, miközben a töltés maradjon állandó. Ha a lemezek közötti távolság éppen d, a távolító erő $W = Fd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}$ munkát végzett, ennyi energia halmozódott fel a kondenzátorban.

2. Az elektromos áram

Tekintsünk két feltöltött vezetőt. Legyen $U_1 > U_2$. Ha a két feltöltött fémtestet vezetővel összekötjük, akkor a magasabb potenciálú test (pozitív) töltést veszít, a másik pedig töltést vesz fel. A töltésáramlás addig tart, ameddig az egyesített vezető test potenciálja ki nem egyenlítődik. A folyamatban a potenciál (intenzív mennyiség) kiegyenlítődése következik be töltés áramlás (extenzív mennyiség) révén. A potenciálkülönbség a töltések mozgását részben rendezetté teszi, s a rendezetlen mozgásra egy rendezett mozgás szuperponálódik. Az elektromos áramlás a töltéshordozók rendezett mozgását jelenti. Az elektromos áramlás létrejöttének feltétele az, hogy legyenek szabad töltéshordozók, és (ha a közeg ellenállása nem nulla), hogy legyen jelen elektromos mező. Megállapodás szerint az elektromos áramlás iránya a pozitív töltéshordozók (valóságos vagy elképzelt) áramlásának irányával egyezik meg. Az áram irányának ez a hagyományos értelmezése a legtöbb vezetőben (pl. fémekben) ellentmond a valóságnak, mivel a negatív töltéshordozók (az elektronok) áramlanak. Ezen tény ellenére áramirányon a hagyományos áramirányt értjük, nem függetlenül attól, hogy az egyenáramra vonatkozó törvényeket hamarabb felfedezték, mint az elektronok létezését.

Elektromos áramerősség és áramsűrűség: A vizsgált felület teljes keresztmetszetén időegység (másodperc) alatt átáramló (nettó) töltésmennyiséget áramerősségnek nevezzük. Jele *I*, mértékegysége az Amper (Coulomb/sec). Ennek megfelelően a töltés mértékegységének időnként az amperórát vagy ampermásodpercet használják. Az elektromos áram (hagyományos értelemben vett) iránya a negatív töltések áramlási sebességével ellentétes, a pozitív töltések elképzelt áramlásának irányával megegyező. A t_1, t_2 időközben az *A* felületen átáramló töltést úgy kaphatjuk meg, hogy az áramerősséget idő szerint integráljuk:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

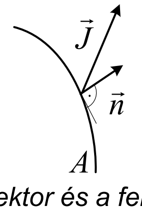
Kérdés: hány elektron áramlik át a vezető keresztmetszetén másodpercenként, ha az áramerősség 1A? Az elektron töltése (az ún. elemi töltés) $e=-1{,}6\cdot10^{-19}$C
Válasz: A töltés $Q=I\Delta t=1$C, az elektronok darabszáma $N=Q/e=6{,}25\cdot10^{18}$

Egy szokványos háztartási gépben az áramerősség néhány tized vagy néhány amper.
Az emberi testen átfolyó fél amperes áram már valószínűleg halált okoz. A villámokban sok ezer, vagy akár több mint százezer amperes áram is folyhat.

Az elektromos áramsűrűség-vektor abszolút értéke az áramlási irányra merőleges egységnyi keresztmetszeten időegység alatt átáramló töltéssel egyezik meg. Iránya megegyezik a pozitív töltéshordozók áramlási irányával, nagyságát határértékképzéssel számolhatjuk ki:

$$j = \lim_{A\to 0} \frac{I}{A},$$

ahol *I* az A felületen átfolyó áram. Mértékegysége az A/m^2 = C/sm^2. Az elektromos áramsűrűség irányított felületre vonatkozó lokális vektormennyiség. Ha elektronok áramlanak a felületi normális irányában, akkor az áramsűrűség-vektor a normálissal ellentétes irányba mutat.



Az áramsűrűség vektor és a felület normálvektora

Az A felületen átfolyó áramerősség tehát:

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

Áramforrások: Ha a töltésekre egyedül az elektromos mező hat, akkor a kezdeti potenciálkülönbségek hamar kiegyenlítődnek és az áramlás véget ér. A töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre, amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti az eredetileg magasabb potenciálú helyre, és ezzel megteremti a folyamatos töltésáramlás lehetőségét. Az olyan berendezéseket, amelyekben ilyen idegen erők működnek, áramforrásoknak nevezzük. A feszültségforrások, vagy áramforrások elektromos energiává alakítanak át valamilyen más energiát, pl.

a) mechanikai energiát (elektromos generátorok, dinamók)
b) kémiai energiát (galvánelemek, akkumulátorok)
c) hőenergiát (termoelemek)
d) fényenergiát (fotocella, fényelem)

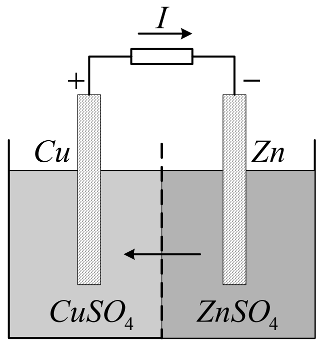
Jelölje a q töltésre ható idegen erőt $\vec{F}^*$, akkor az idegen térerősség:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}$$

Az elektromotoros erő definíciója pedig:

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}^* d\vec{r}$$

Az integrálást az áramforrás belsejében a negatív pólustól a pozitív pólusig kell elvégezni.
Az olyan vezetőt, amelyben nincs idegen erő $\left(\vec{E}^* = 0\right)$, fogyasztónak nevezzük. A fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú ponttól az alacsonyabb potenciálú pont felé folyik (mint ahogy a testek is az alacsonyabb potenciális energiájú hely felé esnek a nehézségi erő hatására). Az áramforrásban pedig a – pólustól a $\oplus$ pólus felé folyik az áram.



Az elektromos áram iránya az áramforráson belül és kívül

Ohm törvény, integrális alak: A tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két sarka közötti feszültséggel. Hányadosukat a vezető két vége közötti ellenállásnak nevezzük, és R-rel jelöljük:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}}$$

A differenciális Ohm-törvény: Vezessük be a fajlagos vezetőképességet, és jelöljük σ-val ('szigma'). A differenciális Ohm-törvénynek vagy Ohm féle anyagi egyenlet:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Ha bevezetjük a fajlagos ellenállást (ρ, azaz 'ró') úgy, mint a fajlagos vezetőképesség reciproka:

$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$

akkor a differenciális Ohm-törvény:

$$\rho \vec{j} = \vec{E}$$

Az Ohm-törvény állítása, hogy $\vec{j}$ *és* $\vec{E}$ egyenesen arányos, csak egy közelítés, érvényességi köre korlátozott és függ a körülményektől. Például fémekben, ha nő a $\vec{j}$ áramsűrűség, akkor a hőmérséklet is növekszik és σ lecsökken, vagyis σ csak akkor lehet független $\vec{j}$ -től, ha T=állandó. Néhány anyagra azonban még állandó hőmérsékleten sem teljesül az arányosság, pl. félvezető diódák. Emellett bizonyos anyagok vezetőképessége hűtéskor egy meghatározott hőmérsékleten végtelenné válik, a jelenséget szupravezetésnek nevezzük. Ólom esetén ez a hőmérséklet $\sim 7K$. Szupravezető állapotban a fajlagos ellenállás eltűnik, $\rho = \frac{1}{\sigma} = 0$. Ilyenkor térerősség nélkül is folyhat áram. Mindezek ellenére az Ohm-törvény az elektromosságtan egyik legfontosabb összefüggése.

Az Ohm-törvény két alakját felhasználva számítsuk ki egy vékony, állandó keresztmetszetű vezető ellenállását. Vékony vonalas vezető esetén a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest, vagyis úgy tekintjük, hogy az áramsűrűség egy adott keresztmetszet minden pontjában ugyanakkora. A vezető hossza legyen ℓ, keresztmetszete *A*, fajlagos ellenállása pedig ρ. A vezető két sarka között a feszültség: $U = E\,\ell$, a rajta átfolyó áram:

$$I = \int_A \vec{j}\,d\vec{A} = j\,A$$

Így a vezető ellenállása $R = \frac{U}{I} = \frac{E\,\ell}{j\,A} = \frac{\rho\, j\,\ell}{jA} = \rho\frac{\ell}{A}$, azaz

$$R = \rho\frac{\ell}{A}$$

Megjegyezzük, hogy a fajlagos ellenállás a különböző anyagokra rendkívül nagymértékben különböző. A jó vezető szobahőmérsékletű rézre pl. $1{,}72\cdot10^{-8}\Omega$m=0,0172 Ωmm^2/m (ez az előzőek szerint azt jelenti, hogy egy 1m hosszú, 1mm^2 keresztmetszetű rézdrót ellenállása mintegy 0,017Ω). A szigetelők (pl. műanyagok) fajlagos ellenállása ugyanakkor akár 10^{15}-10^{20} Ωm is lehet.

Elektromágneses módszerek a földtani kutatásban:

A földtani kutatásban fontos alkalmazásokat nyert az ellenállásmérés. A természetben megtalálható kőzetek fajlagos ellenállása jellemző az adott kőzetre, ezáltal lehetőség nyílik kőzettani tagolásra. A kőzetek fizikai jellemzői közül az elektromos vezetőképesség a legváltozékonyabb, mintegy 20 nagyságrendet fog át. Így az elektromágneses módszerek alkalmazása széleskörű. A különböző módosulatok kutatási mélysége a felszínhez közeli szintektől kezdve többször tíz kilométerig terjed.

Áramtér alatt azt a vektormezőt értjük, ami úgy áll elő, hogy a háromdimenziós tér minden pontjába felvesszük az ottani áramsűrűség-vektort. A geofizikai elektromos - vagy teljesebben elektromágneses - kutatómódszereken belül megkülönböztetünk természetes és mesterséges áramterű méréseket aszerint, hogy mi generálta az áramot. Előbbi esetben az áramot az egyes képződményekben lejátszódó elektrokémiai folyamatok, földi mágneses tér változása és légköri elektromos kisülések okozzák. A mesterséges elektromágneses tereket árambevezetés vagy indukció útján gerjesztjük.

A normál elektromágneses teret homogén, izotróp féltérre számítjuk, mivel a talaj fölött a légkör van, ami ilyen szempontból nem lényeges. Az előbb felsorolt „források" tere a normál térhez képest az eltérő vezetőképességű, dielektromos állandójú földtani inhomogenitások vagy az anizotrópia miatt eltorzul. A geofizikai elektromágneses módszerek ezen inhomogenitásokat (anomáliákat) hivatottak feltérképezni.

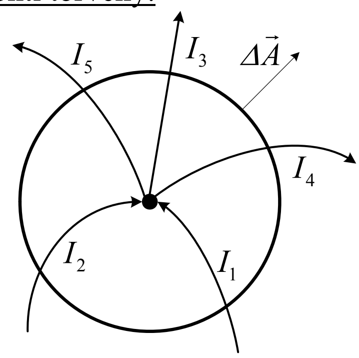
Stacionárius áram, Kirchhoff törvényei: Stacionárius elektromos áramlási térről beszélünk akkor, ha az összes fizikai mennyiség időben állandó (csak a helytől függenek), és a töltések időben állandósult módon áramlanak (de a sztatikus esettel ellentétben itt már mozoghatnak). Ebben az esetben az áramsűrűség minden pontban állandó, vagyis az áramerősség bármelyik keresztmetszeten független az időtől. Ekkor az áramot stacionárius áramnak vagy egyenáramnak nevezzük. Hangsúlyozzuk, hogy ez nem jelenti azt, hogy az egyes töltéshordozók (elektronok) sebessége állandó!
Mint mindenhol, itt is igaz a töltésmegmaradás törvénye. Mivel az elektromos töltés éppúgy megmaradó mennyiség, mint a tömeg, ezért a töltésmegmaradás törvényét formailag ugyanolyan (kontinuitási) egyenlet írja le, mint a tömegmegmaradásét:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_t dV = -\oint_F \vec{j}d\vec{A}$$

Itt F a rögzített V térfogat zárt burkolófelülete, ρ_t a töltéssűrűség. A konvenció szerint a felület normálvektora és így $\Delta\vec{A}$ is kifelé mutat. Az előjeleket úgy választjuk meg, hogy $I > 0$ ha $\vec{j}\cdot\Delta\vec{A} > 0$ (kifelé megy az áram) és $I < 0$ ha $\vec{j}\cdot\Delta\vec{A} < 0$ (befelé megy az áram). A jobboldali felületi integrál tehát akkor pozitív, ha kiáramlás van, ekkor viszont a térfogatban található töltés csökken, a baloldali derivált negatív. Ezért kell a mínusz előjel a jobboldalra. Stacionárius áramlás esetén a bal oldali nulla, hiszen a V térfogatban a töltés nem változhat (ugyanis ekkor a töltések által keltett térerősség is változna), időben állandósult az állapot, így a változási gyorsaság zérus. Ebből az következik, hogy bármilyen zárt felületen ugyanannyi töltés áramlik ki, mint be: „Ami befolyik, az rögtön kifolyik" (Beatrice :) Alkalmazzuk ezt a törvényt vékony vonalas hálózat esetén egy csomópontba befutó vezetékekre. Ezzel:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok algebrai (előjeles) összege zérus. Ez Kirchhoff I. törvénye, a csomóponti törvény.



A felületi normális és az áramirány közötti szög határozza meg az áram előjelét

Az ábrán bemutatott példa esetén $I_3 + I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$. Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a csomóponti törvény a töltésmegmaradás általános törvényét fejezi ki.

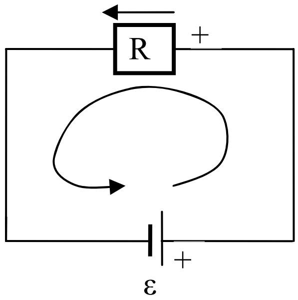
A stacionárius elektromos mező konzervatív mező. A stacionárius mezőben fennáll ugyanaz az alapvető törvény, ami az elektrosztatikus mező esetén:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{r} = 0,$$

vagy másképpen megfogalmazva, a feszültségesések zárt görbére vett előjeles összege nulla. Ebből a feszültség definíciójának felhasználásával adódik Kirchhoff II. törvénye, a huroktörvény: Egy hurok mentén a feszültségek algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

A huroktörvény alkalmazása során szigorú előjelezési szabályokat kell alkalmazni. Ennek bevezetésére tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor csak egy (ideális) áramforrás és egy



ellenállás van. Először felveszünk az ellenálláson egy tetszőleges áramirányt, ezt most a felső nyíl jelzi. A körüljárás során az áramforrás negatív sarkától a pozitív sarkáig megyünk, tehát növekszik a potenciál. Nyilván, ugyanennyit kell csökkenjen, mikor az ellenállásban haladunk, vagyis ott a pozitív saroktól megy a körüljárás a negatív sarokig és a két potenciálkülönbség nagysága megegyezik: ε=RI.

A hálózatszámítás menete tehát a következőképpen történik. Az egyes ágakban tetszés szerinti áramirányokat veszünk fel. Felírjuk az egymástól független csomóponti törvényeket, és meghatározzuk az ismeretlen áramok számát. Ennek megfelelő számú hurokban tetszőleges körüljárási irányokat veszünk fel, és felírjuk a huroktörvényeket. Az ellenálláson áthaladva, ha az áramirány és a körüljárási irány megegyezik, akkor az *IR* szorzat pozitív, egyébként negatív. Ezeket összegezve kapjuk, hogy mennyit csökkent a potenciál az ellenállásokon. Az ideális áramforráson áthaladva, ha előbb a negatív pólusát érintjük, akkor az elektromotoros erő pozitív, egyébként negatív. Ezeket összegezve kapjuk, hogy mennyit nőtt a potenciál az áramforrásokon áthaladva. A két összeg egyenlő, azaz

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j R_j I_j$$

teljesül bármelyik hurokra (ezt az összefüggést lehetne a huroktörvénynek az adott konkrét áramkörre vonatkozó alakjának is nevezni). A csomóponti és hurok törvények alkotta egyenletrendszert (amely az áramokban lineáris) megoldjuk az ismeretlenekre. Ha valahol negatív áramerősséget kapunk, az azt jelenti, hogy az áram ellentétes irányba folyik ahhoz képest, amilyen áramirányt felvettünk.

Integrális Ohm-törvény teljes áramkörre: Tekintsünk egy fogyasztókból és áramforrásból álló zárt áramkört. Azt a közelítést alkalmazzuk, hogy az összes fogyasztót egy koncentrált paraméterrel, az ohmos ellenállásukkal szemléltetjük, ezt most *R*-rel jelöljük. Tegyük fel, hogy most az áramforrás nem ideális, azaz neki, mint vezetőtestnek van ellenállása. Jelölje ezt a belső ellenállásnak nevezett mennyiséget most R_b, az elektromotoros erőt pedig $\mathcal{E}$. Kérdés, hogy hogyan függ az áramerősség az áramforrás, és az áramkör adataitól.
A Kirchhoff törvényekből kapjuk, hogy $\mathcal{E} = I(R + R_b)$, vagy az áramerősségre megoldva:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_b}$$

Ez nevezzük a teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvénynek. A kör áramának I erőssége arányos az áramforrás $\mathcal{E}$ elektromotoros erejével és fordítva arányos a fogyasztó, valamint az áramforrás belső ellenállásának összegével. Ha a külső fogyasztók ellenállása elhanyagolható, akkor rövidzárról beszélhetünk. Az úgynevezett rövidzárási áram értéke: $I_{\text{röv.}} = \dfrac{\mathcal{E}}{R_b}$

Az áramforrásra jutó feszültséget kapocsfeszültségnek nevezzük, most ez egyben az *R* ellenállású fogyasztóra eső feszültség:

$$U_{\mathrm{K}} = \mathcal{E} - I R_b = I R$$

Terheletlen telep esetén $I = 0$, és a kapocsfeszültség megegyezik az elektromotoros erővel

$$U_{\mathrm{K}} = \mathcal{E}$$

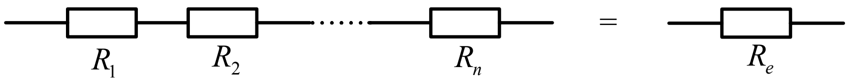
Ekkor viszont $U_{\mathrm{K}} = I R$ nem teljesül. A (nem ideális) áramforrás kapocsfeszültsége $I \neq 0$ esetén mindig kisebb, mint az elektromotoros erő $\mathcal{E}$.

$$U_K = IR = \mathcal{E}\frac{R}{R+R_b}$$

Összetett áramkörök, vonalas hálózatok: Tekintsünk a továbbiakban vonalas vezetőkből és áramforrásokból összeállított hálózatokat. Csomópont a hálózat azon pontja ahol kettőnél több vezeték fut be. Ág a hálózat olyan szakasza, amelynek két vége csomópont, a belsejében azonban nincs több csomópont. Egy ágon belül az áramerősség mindenütt megegyezik. Az egy ágon belüli elemeket sorosan kapcsoltak nevezzük. A hurok a hálózat olyan zárt irányított vonala, amely a hálózat ágaiból épül fel. Párhuzamosnak nevezzük a fogyasztók kapcsolását akkor, ha a megfelelő sarkaik azonos potenciálon vannak.

A Kirchhoff törvények alkalmazásai:

Ellenállások soros kapcsolása: A Kirchhoff törvények alkalmazásával könnyen belátható, hogy a soros kapcsolás helyettesítő vagy eredő ellenállása az egyes ellenállások összege. Tekintsük az alábbi kapcsolást:



Ellenállások soros kapcsolása és az eredő ellenállás

Az eredő ellenállás:

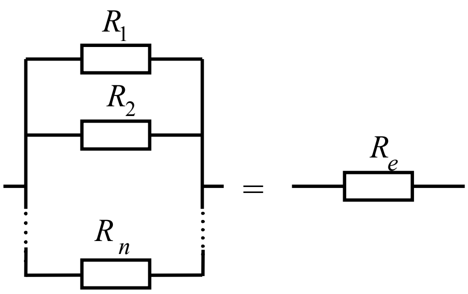
$$\boxed{R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

A bizonyítást olyan esetre végezzük el, ahol két (R_1 és R_2) ellenállás van egy ideális áramforrásra sorosan kötve. Ekkor, mivel nincs elágazás, a csomóponti törvényből $I=I_1=I_2$. Ebből az Ohm törvény felhasználásával azt a következményt is levonhatjuk, hogy $\frac{U_1}{R_1}=\frac{U_2}{R_2}$ vagyis $\frac{U_1}{U_2}=\frac{R_1}{R_2}$, magyarul a feszültség az ellenállások arányában oszlik meg.

A huroktörvényt alkalmazva látható, hogy soros kapcsolásnál a feszültségek összeadódnak, $\varepsilon=U_1+U_2= R_1I+R_2I=(R_1+R_2)I=R_eI=U$, vagyis $R_e= R_1+R_2$.

Ellenállások párhuzamos kapcsolása: Ha az ellenállásokat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokainak összegével:

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}}$$

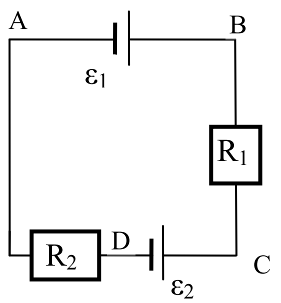


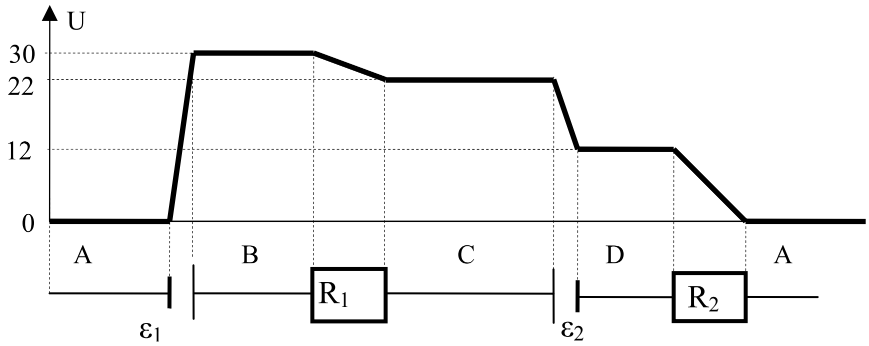
Ellenállások párhuzamos kapcsolása és az eredő ellenállás

A bizonyításhoz vizsgáljunk megint egy olyan esetet, ahol csak két (R_1 és R_2) ellenállás van egy ideális áramforrásra kötve, ezúttal párhuzamosan. A huroktörvényből kapjuk, hogy az ellenállásokon a feszültségesés azonos, és egyenlő az áramforrás feszültségével: $\varepsilon=U_1=U_2$.

Ebből rögtön láthatjuk, hogy $R_1I_1=R_2I_2$, átrendezve $\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}$, vagyis az áramerősség fordítva arányos az ellenállással. A csomóponti törvényből adódik, hogy a két ellenálláson együtt ugyanakkora áram folyik, mint a főágban (azaz az áramforráson): $I=I_1+I_2$. Ebből és az Ohm törvényből $\frac{U}{R_e}=I=I_1+I_2=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}$, azaz $\frac{1}{R_e}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

A potenciálviszonyok szemléltetése zárt áramkörben: Vegyünk egy olyan konkrét példát, ahol két (az egyszerűség kedvéért ideális) áramforrás és két ellenállás van sorosan kapcsolva. Legyen ε_1=30V, ε_2= 10V, R_1=4Ω, R_2=6Ω. Ekkor az áram az óramutatóval megegyező irányban folyik és erőssége I=2A. Az ellenállásokon rendre 8 és 12V feszültség esik. (Ellenőrizzük ezeket az értékeket! Aki ilyeneket nem tud kiszámolni, ne is olvasson tovább!) Az áramkört képzeletben kiterítjük síkba és elindulunk az *A* pontból a *B* irányába. A potenciált kezdetben nullának választjuk, ez addig nem is változik, amíg a drótban haladunk, mivel annak ellenállását nullának vesszük, így feszültség sem eshet rajta.. Az 1. áramforrás negatív pólusáról a pozitívra átérve a potenciál 30V-ra emelkedik. A *B* pont után az R_1 ellenálláson áthaladva a potenciál 8V-ot esik, tehát értéke 22V lesz. A 2. áramforrás a nála erősebb 1. áramforráshoz képest ellentétes polaritással van bekötve, az áramerősséget csökkenti. A pozitív pólusától haladunk a negatív felé, tehát a potenciál 10V-ot csökken. Az R_2 ellenálláson 12V esik, tehát (amint azt a huroktörvény alapján vártuk) visszajutunk a nullába. (A grafikon jobb és baloldalán lévő *A* pont valójában ugyanaz.)





Ennek a grafikonnak a felrajzolása után már igen könnyű válaszolni az olyan jellegű kérdésekre, hogy pl. mennyi a potenciálkülönbség a *B* és a *D* pontok között:
$U_{BD}=U_B-U_D=18V$

Példa: potenciál és térerősség-viszonyok. Két különböző anyagból készült rudat a végeiknél összenyomunk és elhanyagolható belső ellenállású $\varepsilon=3V$ -os feszültségforrásra kapcsolunk. Tegyük fel, hogy az első rúd egy vas-ötvözetből van, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_1=10^{-7}\Omega m$, a második egy olyan aranyalapú ötvözetből, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_2=5\cdot10^{-8}\Omega m$, tehát fele akkora. A két rúd egyébként teljesen azonos, hosszuk egyenként d=1m, keresztmetszetük A=1cm^2. Azt vizsgáljuk, hogy mekkora a rajtuk áthaladó áramerősség, mekkora az áramsűrűség, az elektromos térerősség és hogyan változik a potenciál a rudak mentén.
Számoljuk ki először a rudak ellenállását:

$$R_1=\rho_1\frac{\ell}{A}=10^{-7}\Omega m\cdot\frac{1m}{10^{-4}m^2}=0,001\Omega,$$

hasonlóan, $R_2=0,0005\Omega$. Az eredő ellenállás, mivel sorosan vannak kapcsolva,

$$R=R_1+R_2=0,0015\Omega.$$

Ebből az áramerősség:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{3V}{0,0015\Omega} = 2000A\,,$$

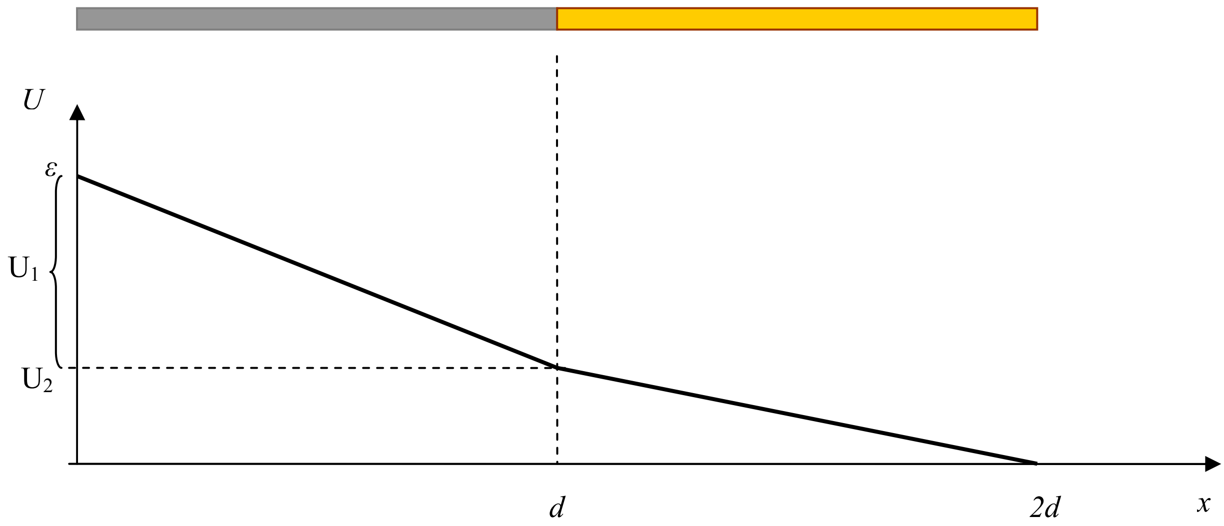
ami egy igen nagy szám. Megjegyezzük, hogy ez az eset gyakorlatilag annak felel meg, hogy rövidre zárjuk az áramkört, ekkor igen rossz közelítés, hogy az áramforrás belső ellenállását elhanyagolhatónak vesszük, de most maradjunk mégis ennél.
Az áramsűrűség mindkét rúdban

$$j = \frac{I}{A} = \frac{2000A}{10^{-4}m^2} = 2\cdot 10^7\,\frac{A}{m^2}$$

A térerősséget kiszámolhatjuk ebből a differenciális Ohm-törvényt felhasználva. Az első rúdban:

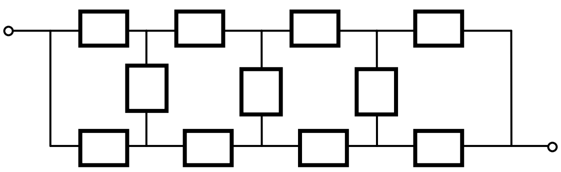
$$E_1 = \rho_1 j = 10^{-7}\Omega m\cdot 2\cdot 10^7\,\frac{A}{m^2} = 2\,\frac{V}{m}$$

A másodikban hasonlóan $E_2 = \rho_2 j = 1\frac{V}{m}$. A kétszer jobb vezetőben tehát feleakkora térerősség szükséges ugyanakkora áramsűrűség létrehozásához.
Az első rúdra eső feszültség $U_1 = E_1 d = 2V$, a másodikra $U_2 = E_2 d = 1V$, azzal a korábban levezetett ténnyel összhangban, hogy soros kapcsolásnál nagyobb ellenállásra arányosan kisebb feszültség jut. Ábrázoljuk a potenciál-viszonyokat a rudakban.

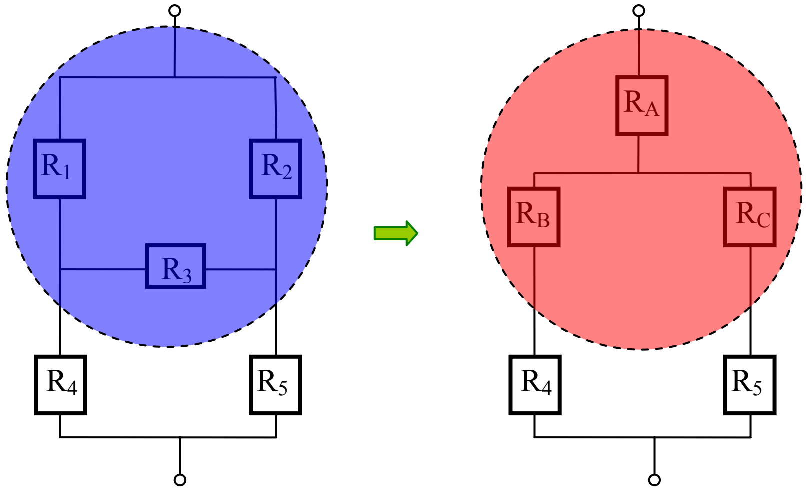


Látható, hogy az első rúdban nagyobb a térerősség, tehát egységnyi hosszra nagyobb potenciálesés jut, meredekebb ott az egyenes.

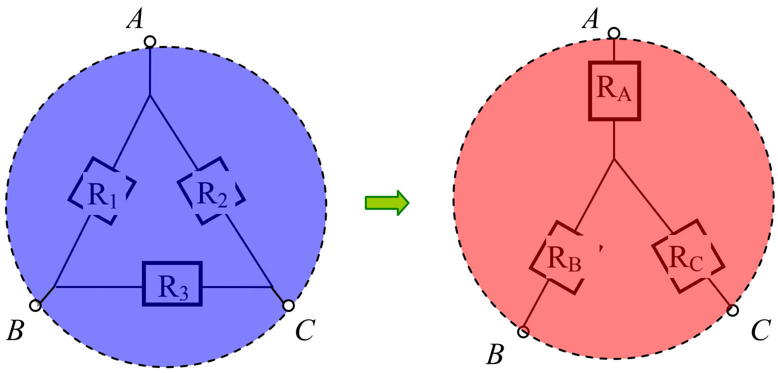
Delta-csillag átalakítás: Több ellenállás esetén előfordulhat, hogy a hálózat felépítése nem tekinthető soros és párhuzamos kapcsolások kombinációjának. Ilyen pl. ha elképzelünk egy létrát, amelynek minden foka egy-egy ellenállás és a fokokat összekötő szárnak is van ellenállása.



A Kirchhoff törvények alkalmazásával természetesen az ilyen áramkörökben is minden adatot kiszámíthatunk, csakhogy ez egy sokismeretlenes egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Most egy másik módszert ismertetünk.



Ha a bal oldali ábrán a kék körben elhelyezkedő ellenállásokat ki tudnánk cserélni a jobb oldali piros körben lévő ellenállásokkal, akkor az eredő ellenállás és az áramerősségek kiszámítása igencsak leegyszerűsödne. A cserét azonban úgy kell végrehajtanunk, hogy a körökön kívül semmi se változzon, más szóval az új áramkör ekvivalens legyen a régivel. Nem változhat meg a körön kívüli ellenállásokon átfolyó és így az egész elrendezésen átfolyó áram erőssége. Ez akkor teljesül, ha a körből kijövő bármely két vezeték között az eredő ellenállás ugyanannyi marad, ha a harmadik ág szabadon marad. Lényegében a baloldalon található delta (más néven háromszög) kapcsolást cseréljük ki a jobb oldalon látható csillagkapcsolásra.



Az ekvivalenciának a következő három feltétele van: az eredő ellenállásnak ugyanannyinak kell lennie mindkét oldalon egyrészt az A és a B, másrészt az A és a C, harmadrészt a B és a C pontok között. A delta esetben az R_{AB} -t úgy számoljuk ki, hogy először az R_2 -t és az R_3 -at összeadjuk, mert sorosan vannak kötve, utána mivel ez az ág az R_1 -el párhuzamosan van, a „replussz" képletet használhatjuk. A csillag esetben, ha két kivezetésre feszültséget kötünk, a harmadik ágban nem folyik áram, tehát egyszerű soros kapcsolásról van szó. Az egyenletek:

$$\frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

Az első két egyenletet összeadva, kivonva belőle a harmadikat, majd a zárójeleket felbontva kapjuk:

$$\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_1+R_2R_3-R_3R_1-R_3R_2}{R_1+R_2+R_3}=2R_A+R_B+R_C-R_B-R_C.$$

Ezután a jobb és baloldalon is az ellentétes előjellel szereplő tagok kiesnek, végül kettővel egyszerűsítve kapjuk:

$$R_A=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

Hasonlóan kapható a másik két ismeretlen ellenállás is:

$$R_B=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

$$R_C=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

Ha ezen szabályok szerint hajtjuk végre a helyettesítést, egyszerű soros-párhuzamos kapcsolások kombinációjára visszavezethetjük az eredő ellenállás számítását.
Előfordulhat, hogy egy csillagkapcsolást cserélünk ki deltakapcsolássá. A fenti áramkör is leegyszerűsíthető úgy is, hogy az $R_1-R_3-R_4$ csillagot cseréljük ki egy megfelelő deltára. Ehhez az átalakításhoz is levezethetők a szükséges képletek, ezzel azonban nem foglalkozunk.

Áram- és feszültségmérés: Tegyük fel, hogy meg akarjuk mérni, mekkora áram folyik át egy R ellenálláson. Ekkor azt szeretnénk, hogy az ampermérőn és R-en ugyanakkora áram folyjék át. Ez akkor teljesül, ha az ampermérő sorosan van kapcsolva R-rel. Ha a feszültséget kell megmérni, azt akarjuk, hogy ugyanakkora legyen a műszer sarkai között a feszültség, mint R sarkai között. Ekkor a feszültségmérőt párhuzamosan kell kapcsolni R-rel.
Bármely mérési eljárásnál alapvető követelmény, hogy a mérés folyamata, a mérőműszer rákapcsolása ne (vagy ne észrevehetően) változtassa meg a mérendő mennyiséget. Ha az ampermérő R_b belső ellenállása nagy lenne, akkor az ág eredő ellenállása $(R+R_b)$ számottevően nőne a műszer beiktatásakor, vagyis az áram lecsökkenne. Tehát az ampermérő ellenállásának igen kicsinek kell lennie. Ha az R-rel párhuzamosan kapcsolt feszültségmérő ellenállása kicsi lenne, az eredő ellenállás nagyon lecsökkenne, emiatt megnőne a körben folyó áram, ami szintén meghamisítaná a mérési eredményt. Ezért a voltmérők ellenállása igen nagy szokott lenni.

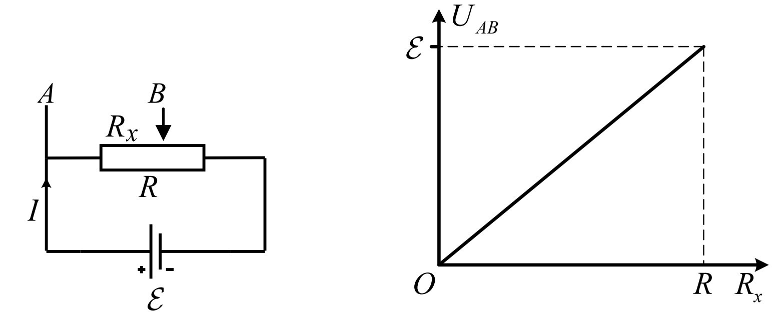
Műszerek méréshatárának kiterjesztése, sönt- és előtét-ellenállás: Egy áram- vagy feszültségmérő műszer tönkremegy, ha egy meghatározott I_m áramerősségnél, ill. U_m feszültségnél több folyik át rajta. Ezt a maximális áramerősséget, ill. feszültséget a műszer méréshatárának nevezzük. Tegyük fel, hogy egy érzékeny műszernél I_m=1A, de mi kb. 100A-t szeretnénk vele mérni. Ekkor, ha ismert a műszer R_b belső ellenállása, veszünk egy ennél kb. százszor kisebb R_s söntellenállást, és párhuzamosan kötjük a műszerrel, hogy az áram nagy része rajta, és ne a műszeren folyjon. Ekkor a mérendő áramra $I=I_m+I_s$, továbbá $I_m/I_s=R_s/R_m$
.

Sönt- és előtét-ellenállás kapcsolása

Ezekből $I_s=I_mR_m/R_s$, azaz $I=I_m(1+\frac{R_m}{R_s})$. Vagyis ha R_s századrésze R_m-nek, akkor I_m százegyszerese is mérhető. Ekkor persze a műszer által mutatott áramerősség-értéket 101-gyel kell szorozni, hogy megkapjuk az R-en átfolyó értéket.

Egy feszültségmérő méréshatárát is megnövelhetjük, ha előtét-ellenállást kapcsolunk, a műszerrel sorosan. Ekkor az R ellenálláson $U=U_m+U_e$ feszültség esik, emellett $U_m/U_e=R_m/R_e$,, amiből $U = U_m(1+\frac{R_e}{R_m})$, vagyis az előtét-ellenállásnak jóval nagyobbnak kell lennie a műszer (eredetileg is nagy) belső ellenállásától, hogy számottevően növelje a méréshatárt. Példa: Legyen a műszer méréshatára 2V, belső ellenállása 500Ω. Ekkor a méréshatár 300V-ra való növeléséhez az kell, hogy 298V feszültség az előtétre essen, vagyis 298/2=149-szer nagyobb előtétet kell beiktatnunk, vagyis R_e=149·500Ω=74500Ω.

Feszültségosztó (potenciométeres) kapcsolás: Gyakran előfordul az, hogy egy fix feszültségű áramforrás segítségével változtatható feszültséget kell előállítanunk. Ezt a feladatot valósíthatjuk meg terheletlen feszültségosztó kapcsolás segítségével:



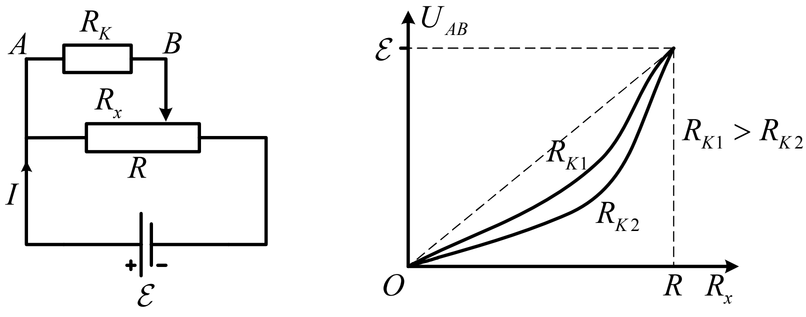
Terheletlen feszültségosztó kapcsolás és karakterisztikája

A főkörben folyó áramerősség természetesen $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, így az R_x ellenálláson eső feszültség:

$$U_{AB} = R_x I = \mathcal{E}\frac{R_x}{R}$$

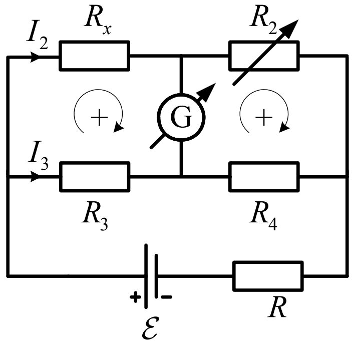
A terheletlen potenciométer két kapcsán megjelenő feszültség lineáris függvénye az R_x ellenállásnak, és $0 \le U_{AB} \le \mathcal{E}$.

A következő ábrán egy terhelt potenciométeres kapcsolás látható. A változtatható feszültséget ilyenkor egy fogyasztóra kötjük. Ilyenkor a karakterisztika már nem lineáris.



A terhelt feszültségosztó kapcsolás és karakterisztikája

Ellenállásmérés <u>Wheatstone-híd</u>dal: Tekintsük az alábbi kapcsolást, legyen R_x az ismeretlen ellenállás, R_2 pedig egy szabályozható ellenállás, G egy érzékeny árammérő, úgynevezett galvanométer. Az elrendezést összeállítva a G galvanométeren áram fog folyni.



Ellenállás mérése Wheatstone-híd kapcsolással

Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk, amíg a híd árammentes nem lesz, $I_G \approx 0$. Ekkor a Wheatstone-híd kiegyenlített állapotban van. Az ilyen mérési módszert nullmódszernek nevezzük. A kiegyenlített állapotra felírhatóak az alábbi hurokegyenletek:

$$I_2 R_x - I_3 R_3 = 0 \text{ és } I_2 R_2 - I_3 R_4 = 0$$

Ha pl. a másodikból kifejezzük I_2-t és beírjuk az elsőbe, kapjuk az ismeretlen ellenállást:

$$\boxed{R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}}$$

A galvanométernek nem szükséges pontosnak lennie, a fontos az, hogy érzékeny legyen, vagyis nullát mutasson, ha nem folyik áram és nem nullát, ha folyik. Ekkor (és csak ekkor!), ha a műszer nullát mutat, használhatjuk a fenti bekeretezett képletet anélkül, hogy ismernénk az áramforrás elektromotoros erejét vagy az ellenállásokon eső feszültséget vagy a rajtuk átfolyó áramot.

A stacionárius áram munkája és teljesítménye: Ha a fogyasztó be és kivezetése közötti feszültség U és rajta t idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor a mező munkája:

$$W = QU = UIt$$

Ez annak a munkának az értéke, amit a mező végez az U feszültségű szakaszon t idő alatt, miközben ott I erősségű áramot hajt. Az elektromos energia különböző gépek, berendezések, stb., az ún. fogyasztók segítségével más energiává alakítható át, pl.

- mechanikai energiává (motorok)
- kémiai energiává (akkumulátorok)
- hőenergiává (vasaló, hősugárzó)
- fényenergiává (izzólámpa, LED)

Ha a fogyasztó ohmos ellenállása nem nulla, hőenergia mindig keletkezik. Egy vezeték esetén az elektromos mező munkája megegyezik a vezeték belső energiájának növekedésével (az elektronok energiája csökken, a vezető hőmérséklete növekszik). Az Ohm törvény segítségével ezt két további alakban is kifejezhetjük. Amennyiben az ellenállás R, az elektromos áram munkáját a Joule-törvény adja meg:

$$W = UI \cdot t = I^2 R \cdot t = \frac{U^2}{R} t$$

Homogén fémes fogyasztó esetén termikus egyensúlyban a fogyasztó éppen annyi úgynevezett Joule hőt ad le a környezetének, mint amennyi munkát az elektromos mező végez. A stacionárius áram által végzett munka mértékegysége a joule, de a gyakorlatban használják a kWh (kilowattóra) egységet is: $1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$

A stacionárius áram teljesítménye pedig:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

A Joule törvény differenciális alakja:

$$p_J = Ej = \rho j^2 = \sigma E^2 = \dots,$$

Ahol p_J-vel az egységnyi térfogatban egységnyi idő alatt keletkezett hőt, azaz a Joule-hő teljesítménysűrűségét jelöltük.

Ha a keletkezett hőenergia elég magas hőmérsékletre melegíti az ellenállást, az látható fényt sugároz ki, ezen alapszik az izzólámpa. Azonban, mint az később látni fogjuk, a kisugárzott fénynek csak egy kisebb része esik a látható tartományba, ezért az izzólámpák hatásfoka nem túl jó. Velük ellentétben a LED-ek (Light-emitting diode) fénysugárzása nem a magas hőmérsékleten alapul, egy sokkal kisebb frekvenciatartományban sugároznak, mint az izzólámpák, így képesek azok hatásfokának többszörösét is elérni.