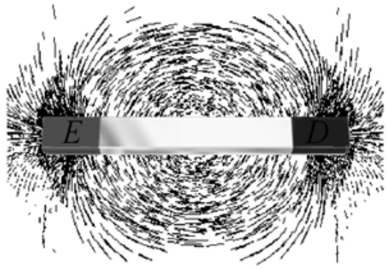
Mágnesesség, elektrodinamika

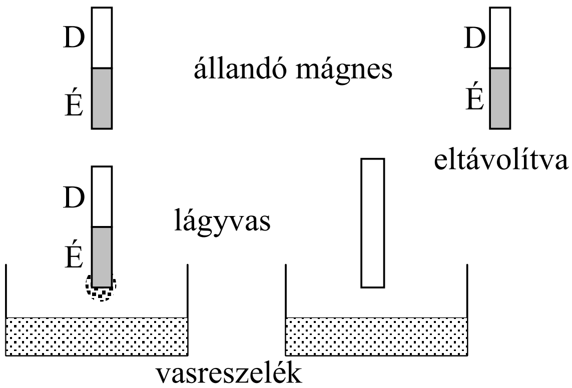
Mágneses alapjelenségek: Egyes vasércek, például magnetit (Fe_3O_4) képesek apró vasdarabokat magukhoz vonzani. A mágneses test és a vasdarab között mindig vonzó a kölcsönhatás. Az ilyen mágneseket permanens vagy állandó mágneseknek nevezzük. Tapasztalat szerint az acél felmágnesezhető egy mágneses érc segítségével. Egy acél mágnestű két végét pólusnak nevezzük, a vasreszelék csak ide tapad. Ezt a jelenséget egy mágnesrúd segítségével könnyen bemutathatjuk.



Vasreszelék rúdmágnes körül

Tapasztalat szerint egy felfüggesztett mágnestű a földrajzi É-D irányba áll be, tehát a Földnek is van mágneses mezője. Azt a pólust, amely a stabil egyensúlyi helyzetben É- felé néz, É-i pólusnak nevezzük, a másikat, pedig D-i pólusnak. Két mágnestű egynemű pólusait közelítve taszítóerő, a különnemű pólusok között, pedig vonzóerő lép fel.

A lágyvas felmágnesezhető, azonban a mágnes eltávolításakor mágneses tulajdonságát elveszti. A jelenséget mágneses polarizációnak nevezzük.



A lágyvas felmágnesezése

A tapasztalat szerint semmilyen módon nem érhető el, hogy egy testben a kétfajta mágnesség közül az egyik túlsúlyba kerüljön. Még az elemi részeknek, például az elektronnak is ugyanannyi az É-i, mint a D-i mágnessége. Mágneses töltés, mágneses monopólus tehát nem létezik. A legegyszerűbb mágneses alakzat a mágneses dipólus. Az elektromos influenciának, vagy megosztásnak nincs mágneses megfelelője.

A tapasztalat szerint a mozgó töltés, például árammal átjárt vezető közelébe helyezett mágnestű elfordul. A mozgó töltés tehát nemcsak elektromos, hanem mágneses mezőt is kelt, és ebben a mágneses dipólusra forgatónyomaték hat. A hatás kölcsönös, mivel áramjárta vezetőre mágneses mezőben erő hat, ezt Ampere-erőnek nevezzük.

A mágneses indukció-vektor bevezetése: A mágneses mezőt jellemző vektort, a $\vec{B}$ mágneses indukcióvektort az Ampère-erő segítségével definiáljuk. Tekintsünk egy áramjárta egyenes vezetőt, amelyet a (homogén) mágneses mező egy tetszőleges pontjába helyezzük, és mérjük a rá ható erőt. Az vezetőre jellemző adatok az áramerősség I, és az az $\vec{\ell}$ vektor, amely az áram irányába mutat, hossza pedig megegyezik a vezető hosszával.

A mérési tapasztalatok szerint a vezetőre ható erő mindig merőleges a vezetőre: $\Delta\vec{F} \perp \vec{\ell}$. Homogén térben mindig felvehető egy olyan kitüntetett *e* egyenes, amelynek irányába állítva az vezetőt $\vec{\ell} \parallel e$, rá erő nem hat, $\vec{F} = \vec{0}$. Ha a vezető α szöget zár be az *e* egyenessel, akkor az erő merőleges az $\vec{\ell}$ és *e* síkjára és nagysága arányos az I árammal, az $\vec{\ell}$ vektor ℓ hosszával, valamint a közbezárt szög szinuszával. A $\frac{F}{\mathrm{I}\ell\sin\alpha}$ hányados az áramelem adataitól már nem függ, kizárólag a mágneses mezőt jellemzi, ezt nevezzük a mágneses indukció nagyságának.

$$B = \frac{F}{\mathrm{I}\ell\sin\alpha}$$

A mágneses indukció iránya pedig párhuzamos az *e* kitüntetett egyenessel, és értelme olyan, hogy $\vec{\ell}$, $\vec{B}$ és $\vec{F}$, ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkosson: $\{\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F}\}$. A mágneses indukció mértékegysége: $[B] = 1\frac{N}{Am} = 1\frac{Nm}{Am^2} = 1\frac{VAs}{Am^2} = 1\frac{Vs}{m^2} = 1tesla = 1T$

Ezt felhasználva az Ampère-erő képlete:

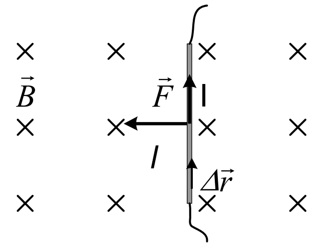
$$\boxed{\vec{F} = \mathrm{I}\vec{\ell} \times \vec{B}}$$

Ha a vezető nem egyenes, vagy a tér nem homogén, akkor kicsi $\Delta\vec{r}$ darabokra kell osztani a vezetőt. Az ilyen darabokra ható erő:

$$\Delta\vec{F} = \mathrm{I}\Delta\vec{r} \times \vec{B}$$

Egy vékony vonalas vezetőre ható erőt a vezetőszakaszra való integrálással kaphatjuk meg:

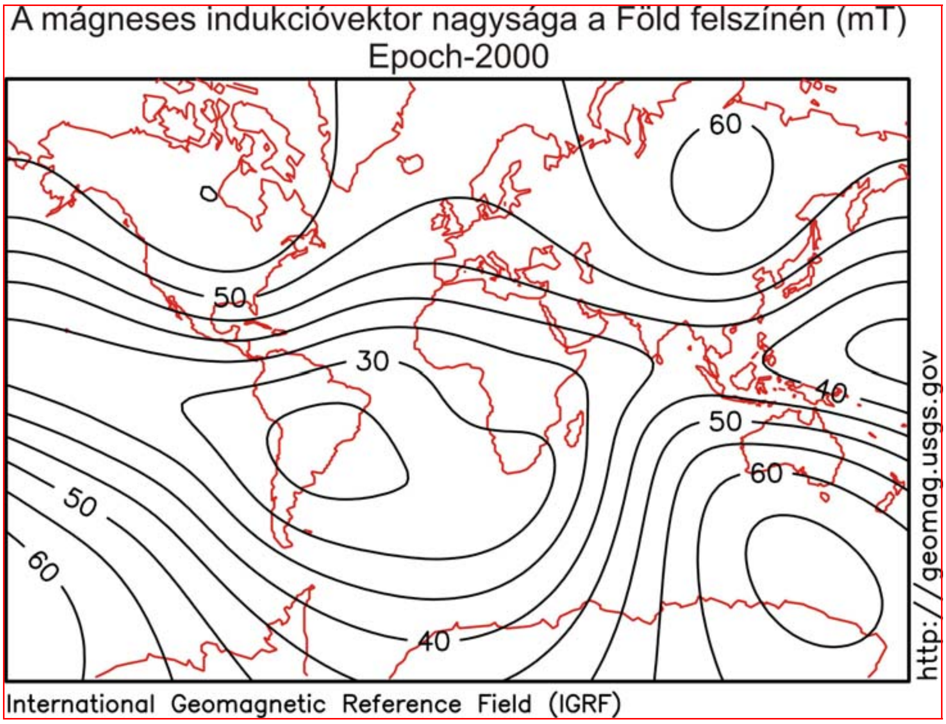
$$\vec{F} = I\int(d\vec{r} \times \vec{B})$$



Ampère-erő iránya

Tekintsünk egy *l* hosszúságú *A* keresztmetszetű vonalas vezetőszakaszt, és az legyen merőleges a homogén mágneses mezőre, (lásd az ábra). Ekkor az erő iránya az ábrán látható, a nagysága pedig: $F = BIl$. Ha a vezeték α szöget zár be a $\vec{B}$ mágneses indukcióval, akkor: $F = B\mathrm{I}l\sin\alpha$

A Földnek is van mágneses tere. A mérések és elméleti vizsgálatok szerint az állandó tér 99%-a a Föld belsejéből származik[1]. A Föld mágneses terét a mágneses indukcióvektorral, illetve annak vertikális és horizontális komponenseivel jellemezhetjük. Geofizikai mérések szerint a mágneses indukcióvektor nagysága 25-65 μT intervallumon változik (1. ábra). Az időbeli változás szintén jelentős. Az évszázados változás a földi mágneses térben 100 évenként néhány százalékos változást hoz, egyes helyeken azonban évi 0,1 uT változást is mértek. A mágneses tér napi változásának nagysága 0,05-0,1 uT lehet, azonban mágneses viharok hatására 0,1-1 uT-ás változások is felléphetnek..



1. ábra

A Lorentz-erő: Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a vezetőben folyó I áram azt jelenti, hogy N db q töltésű elektron ugyanazon v sebességgel halad az ℓ hosszúságú vezetőben, (azaz ugyanazon Δt idő alatt teszi meg az ℓ távolságot) ekkor $I=Nq/\Delta t$ és $v=\ell/\Delta t$. Ezeket az Ampere-erő képletébe beírva az N db elektronra ható erő:

$$F = BI\ell = BNq \cdot \ell / \Delta t = BNqv$$

Vagyis az egy elektronra ható erő

$$F = qvB$$

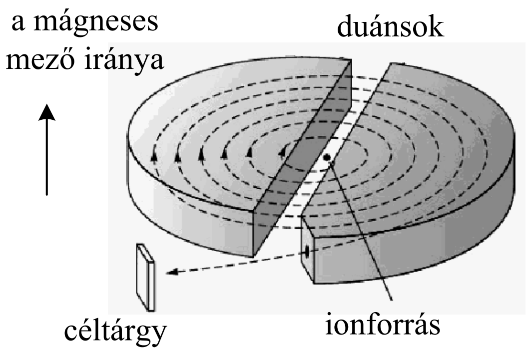
Általánosan egy $\vec{B}$ mágneses térben $\vec{v}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ható erő, az ún. mágneses Lorentz-erő:

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

Ez az erő merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, $\left\{\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}\right\}$ ilyen sorrendben jobbsodrású rendszert alkot. Ha elektromos tér is van jelen, a q töltésre az $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ elektromágneses Lorentz-erő hat.
Az áram a töltéshordozók rendezett mozgása. Az áramvezetőre azért hat erő a mágneses mezőben, mert a mozgó töltéshordozókra hat erő, és mivel ezek a vezetőhöz vannak kötve, az erő átadódik a vezető testének.

A (mágneses) Lorentz-erő minden pillanatban merőleges a sebességre, ezért a sebesség nagysága nem változik, csak az iránya (vagyis a mágneses Lorentz-erő teljesítménye nulla). Például, ha $\vec{v}$ merőleges $\vec{B}$-re, a töltött részecske körpályára kényszerül, ha $\vec{v}$ nem merőleges $\vec{B}$-re, akkor a töltés csavarvonal mentén mozog.

Alkalmazás: A Lorentz-erőnek fontos szerepe van akkor, amikor töltött részecskéket akarnak eltéríteni, illetve gyorsítani. A ciklotron egy olyan részecskegyorsító, amiben a Coulomb erőt használják a sebesség nagyságának növelésére és a Lorentz erőt a részecske körpályán tartására.



A ciklotron részecskegyorsító vázlata

A töltött részecskék gyorsítása a két „duáns" között történik, amelyekre váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek frekvenciáját úgy számítják ki, hogy mindig gyorsítsa a részecskét, azaz amikor a részecske a duánsok között van, akkor az a duáns, amely felé éppen repül, vonzóerőt fejt ki rá. Az alkalmazott homogén mágneses mező pedig körpályára kényszeríti a részecskét, vagyis a centripetális erőt a Lorentz-erő adja:

$$Q v B = m \frac{v^2}{r}$$

a körpálya sugara:

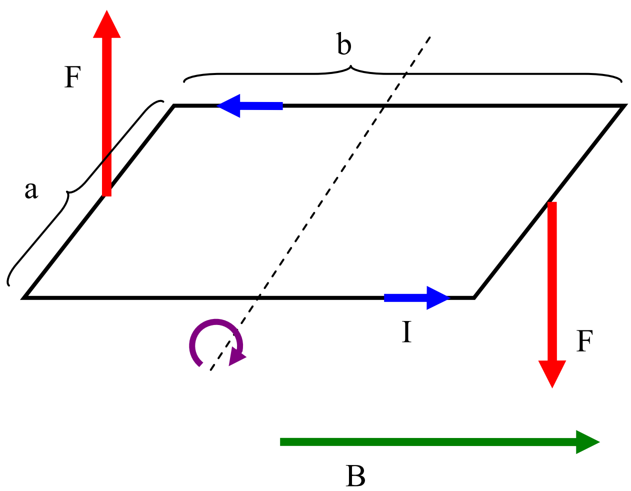
$$r = \frac{m v}{Q B} ,$$

tehát ahogy gyorsul a részecske, úgy kerül a középponttól távolabb. A körmozgás periódusideje:

$$T = \frac{2 r \pi}{v} = \frac{2 \pi m}{Q B}$$

Vagyis a periódusidő (és ezzel a körfrekvencia) a sebességtől és a pálya sugarától független állandó. Ez azért fontos, mert így állandó frekvenciájú feszültséget lehet a duánsokra kapcsolni a gyorsításhoz. Ezekkel a berendezésekkel (és más típusú gyorsítókkal) egyrészt a természetben végbemenő radioaktív bomlásoknál jóval nagyobb sebességű és így mozgási energiájú részecskéket lehet előállítani (sok reakcióhoz ez szükséges), másrészt el lehet érni, hogy a részecskékből álló nyaláb monoenergiás legyen, azaz mindegyikük sebessége kb. ugyanakkora. Ezt a berendezést főleg orvosi diagnosztikában használt izotóptermelésre használják, például ${}^{131}_{53}I$ jód izotópot állítanak elő, valamint anyagvizsgálatra, illetve magfizikai alapkutatásra.

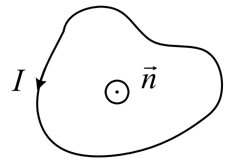
Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra: Vegyünk egy egyszerű esetet, egy téglalap alakú áramhurkot, amelyben pozitív irányba folyik az áram (kék nyíl). A téglalap oldalai legyenek *a* és *b*, a terület *A*=*ab*, a mágneses indukció (zöld nyíl) homogén és a *b* oldallal párhuzamos. Ekkor a két *a* hosszúságú oldalra egyenként *B*I*a* erő hat (piros nyilak), amelyek ellentétes irányúak, tehát az eredő erő nulla. A forgástengelyt az egyszerűség kedvéért a középpontban véve (szaggatott vonal), a két erő ugyanarra forgat (lila görbe nyíl), mindkettő erőkarja *b/2*.



Az eredő forgatónyomaték $2 \cdot BIa \cdot b/2 = BIab = BIA$. Belátható, hogy ez a nyomaték az áramhurok alakjától független és az általános összefüggés:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{A} = A\vec{n}$ a felületvektor melynek irányítását jobb kéz szabály szerint adhatjuk meg. A kicsiny sík áramhurokban folyó áram iránya és a felületi normális iránya a jobbcsavar szabály szerint kapcsolódik össze.



A felületi normális iránya

Megállapodás szerint az itt bemutatott jelölés $\odot$ a felületből kifelé mutató vektort jelent, a felületbe befelé mutató vektort pedig a következő módon jelöljük: $\otimes$.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot már korábban láthattuk:

$$\overrightarrow{M}_{forg} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ennek analógiájára az áramhuroknak mágneses dipólnyomatékot vagy dipólmomentumot tulajdonítunk:

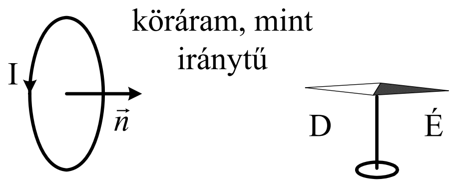
$$\overrightarrow{M}_{forg} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

ahol $\vec{m} = I\vec{A}$ az áramhurok mágneses dipólmomentuma, melynek mértékegysége: $[\vec{m}] = 1Am^2$

A permanens mágneses dipólusra (mágnestűre) ható forgatónyomaték hasonlóan:

$$\overrightarrow{M}_{forg} = \vec{m} \times \vec{B} \ , \quad \text{ahol} \quad \vec{m} \parallel \vec{l}$$

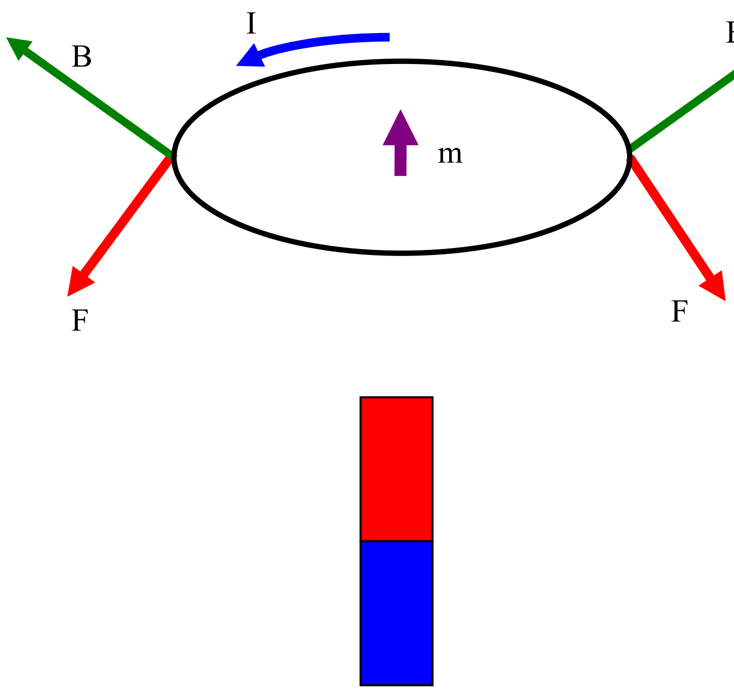
Az $\vec{m}$ mágneses dipólnyomaték abszolút értéke attól függ, milyen erősen van felmágnesezve a mágnestű. A dipólusra ható forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{m} \parallel \vec{B}$. A kis áramjárta hurok tehát iránytűként használható.



Permanens mágneses dipólus, és köráram hasonlósága

Inhomogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra ható erő: Könnyen belátható, hogy inhomogén mágneses mezőben az áramhurokra vagy általában a mágneses momentumra ható eredő erő általában nem nulla, hanem az inhomogenitás mértékétől (a térerősség gradiensétől) és a hurok elhelyezkedésétől függ. (Analógia: inhomogén elektromos erőtérben az elektromos dipólusra erő, homogénben csak forgatónyomaték hat.) Vizsgáljuk először egy téglalap alakú áramhurkot, ugyanúgy, mint fentebb a forgatónyomaték-számításnál. Tegyük fel, hogy a $\vec{B}$ továbbra is ugyanolyan irányú, csak a jobb oldalon $\vec{B} + \Delta\vec{B}$ nagyságú. Ekkor nem kell sokat számolnunk: egyszerűen a jobb oldali erőt ki kell cserélni $\vec{F} + \Delta\vec{F}$-re, az eredő erő $\sum \vec{F} = \Delta\vec{F} = \Delta\vec{B} \cdot IA$ lesz.

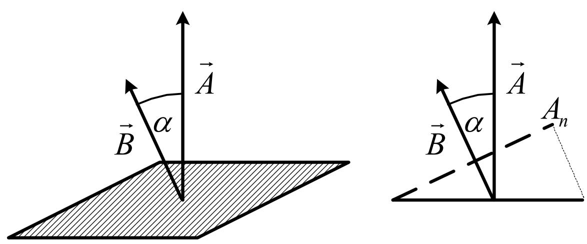
Vegyünk inkább egy érdekesebb esetet, amikor egy kör alakú áramhurok alatt egy rúdmágnes van elhelyezve, a keret síkja alatt, rá merőlegesen, szimmetrikusan. Ekkor a mágneses indukcióvektor a vezető egyes kis szakaszain a szakaszra merőleges, kifelé-fölfelé mutat (zöld nyilak). Az vezető szakaszokra ható erők minden pontban a szakaszokra és $\vec{B}$-re merőlegesen, kifelé-lefelé mutatnak (piros nyilak). Az erők vízszintes komponensei a szimmetria miatt kiejtik egymást, ezért az eredő erő lefelé mutat. A keret mágneses momentuma felfelé irányul (kicsi lila nyíl), hasonlóan, mint a rúdmágnes momentuma. Számolás nélkül is megállapíthatjuk, hogy a két azonos irányban álló momentum vonzza egymást. Ha ellentétes irányban állnának, nyilván taszító erő lépne fel.



Mágneses indukciófluxus és Gauss-törvény: A mágneses mező szemléltetésére a mágneses indukcióvonalakat használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral. Megállapodás szerint a mágneses indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal haladjon át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

A mágneses indukciófluxus Φ irányított felületre vonatkozik, és megadja a felületet átdöfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Homogén mágneses mező esetén az A felület indukciófluxusa:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\alpha$$



A felület mágneses mezőre merőleges vetülete

Ha a mágneses mező inhomogén, akkor egy elemi kicsiny felület fluxusa $\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{A}$, egy tetszőleges A felület indukciófluxusa pedig integrálással nyerhető:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek, így tetszőleges zárt felületre számított mágneses indukciófluxus mindig zérus. A mágneses Gauss-törvény tehát:

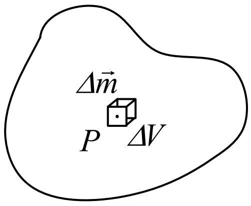
$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincsen végük. A törvény differenciális/lokális alakja: $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, vagyis a mágneses indukciónak nincsenek forrásai.

A mágneses polarizáció, a mágnesezettség vektora: A nukleonok (proton, neutron) mágneses dipólnyomatéka sokkal kisebb, mint az elektronoké, ezért egy atom vagy molekula mágneses dipólnyomatéka lényegében megegyezik az elektronok dipólnyomatékának összegével. Az elektronok mágneses dipólnyomatéka két részből áll:

a) mozgásból származó mágneses nyomaték, mivel az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
b) saját mágneses nyomaték (a spinből adódik)

Az anyag mágnesezettségének jellemzésére vezessünk be egy új vektort. Legyen $\Delta\vec{m}$ a ΔV térfogatban lévő mágneses dipólnyomatékok vektori összege.



Az anyag mágnesezettségének bevezetése

Definíció szerint a mágnesezettség vektora a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses nyomatékot.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$$

A mágnesezettség mértékegysége: $[M] = 1\frac{Am^2}{m^3} = 1\frac{A}{m}$.

Célszerű bevezetni a <u>mágneses térerősséget</u> mint a $\vec{B}$ és a $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációját, mivel rá egyszerű alakú alaptörvény állapítható meg. A $\vec{H}$ mágneses térerősség <u>definíció</u> szerint:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

Itt a $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ univerzális állandó a vákuum permeabilitása. A mágneses térerősség mértékegysége: $[H] = [M] = 1\frac{A}{m}$. Ezzel a permeabilitás mértékegysége: $[\mu_o] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{1\frac{Vs}{m^2}}{1\frac{A}{m}} = 1\frac{Vs}{Am}$. A $\vec{M}$ mágnesezettség, valamint a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot <u>anyagegyenlet</u>nek nevezzük. Első közelítésben B és M között arányosságot feltételezünk, ilyenkor beszélünk lineáris anyagegyenletről. Ha $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$. A legtöbb izotróp közegben a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok nemcsak egyirányúak, hanem a tapasztalat szerint egymással egyenesen arányosak is:

$$\boxed{\vec{M} = \chi\vec{H}}$$

χ a mágneses <u>szuszceptibilitás</u>. Ezzel

$$\vec{B} = \mu_o\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_o\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_o(1+\chi)\vec{H} = \mu_o\mu_r\vec{H} \ ,$$

ahol $\mu_r = 1+\chi$ a relatív permeabilitás, $\mu = \mu_o\mu'$ pedig az abszolút permeabilitás.

Az anyagegyenlet így: $\vec{B} = \mu_o(1+\chi)\vec{H}$, azaz $\boxed{\vec{B} = \mu_o\mu_r\vec{H}}$ vagy $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

A mágneses energia, mágneses energiasűrűség: A homogén mágneses mező energiája egy V térfogatú térrészben:

$$W_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,V$$

A mágneses mező energiasűrűsége megadja az egységnyi térfogatban található mágneses energiát:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

A w mértékegysége az elektromos esethez hasonlóan J/m^3. Ha a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség $\vec{H}$ és a mágneses indukcióvektor $\vec{B}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\Delta V$ mágneses energia található. Ha a mező nem homogén, egy tetszőleges véges V térfogatban természetesen integrálással nyerhetjük a mágneses energiát:

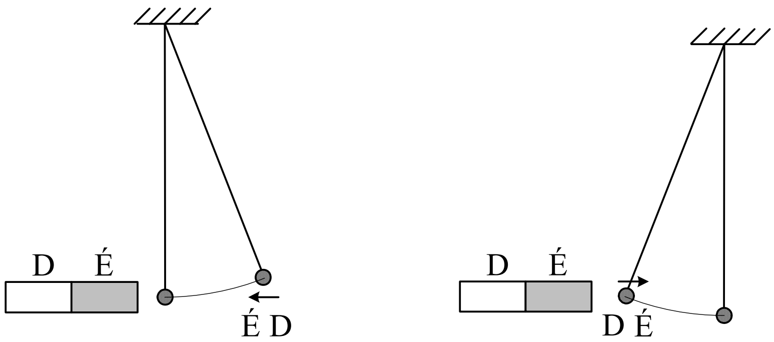
$$W = \int_V w_m dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

Az anyagok mágneses tulajdonságai

Mai ismereteink szerint az anyagok mágneses tulajdonságaik alapján három fő típusba sorolhatóak: dia-, para-, ferromágneses típusba, de ezen felül léteznek antiferromágneses anyagok és ferritek is, emellett a szupravezetőket is külön kategóriába sorolják.
Az atomok mágneses tulajdonságaiért főleg az elektronok felelősek (a mag mágneses momentum ezreléknél kisebb járulékot eredményez) és az atom mágneses momentuma az elektronok pálya- és spin-momentumából tevődik össze. Speciális esetekben – ha az atom páros számú elektront tartalmaz, amelyek spin és pályamomentumai egymást kompenzálják – az atom mágneses momentuma zérus is lehet, de általában az anyagok atomjai spontán mágneses momentummal rendelkeznek.
Külső mágneses tér hatására két folyamat zajlik le: egyrészt a spontán momentummal rendelkező atomok rendeződni igyekeznek, a mágneses tér konkurál a hőmozgással és ezt nevezik paramágneses folyamatnak; másrészt járulékos mágneses momentum is indukálódik az atomokban függetlenül attól, hogy a mágneses tér bekapcsolása előtt rendelkeztek-e mágneses momentummal. Az így indukált momentum a Lenz-törvény értelmében az őt létrehozó mágneses tér ellen dolgozik, azaz $\vec{M}$ ellenkező irányú lesz, mint a mágneses teret jellemző $\vec{H}$. Mind a para-, mind a diamágneses folyamat során a keletkező mágnesezettséget a külső mágneses tér hozza létre és az $\vec{M}(\vec{H})$ függvény a kérdéses anyagra jellemző. Nem túl nagy mágneses terek esetén jó közelítésként feltételezhetjük, hogy a mágnesezettség lineárisan függ a mágneses tértől, azaz $\vec{M} = \chi\vec{H}$, ahol χ a mágneses szuszceptibilitás (ahogy néhány oldallal korábban bevezettük) és $\chi < 0$ esetén diamágneses, $\chi > 0$ esetén paramágneses anyagról beszélünk. Tehát a diamágneses folyamat minden atomnál szerepet játszik, míg a paramágneses csak abban az esetben, ha az atom spontán mágneses momentummal rendelkezik. Ha ez utóbbi a helyzet, akkor rendszerint a paramágneses folyamat felülmúlja a diamágnesest és eredőként $\chi > 0$ lesz, ezért beszélünk ilyen esetben paramágneses anyagról.

Diamágnesség: A nemesgázok, a bizmut, réz, ezüst, arany, higany, ólom, víz olyan anyagok, amelyek külső mágneses mező nélkül nem mutatnak mágneses tulajdonságokat. Inhomogén mágneses mezőbe helyezve a kis bizmut-darabot, taszító hatást észlelhetünk. A bizmut polarizálódott és a mágnesező tér indukciója ellentétes irányú a mágnesezettség vektorával, ezért, amint korábban láttuk, taszító erőhatás lép fel. Ezeknél az anyagoknál tehát $\chi < 0$, abszolút értéke általában nem több mint 10^{-4}, de ennél néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A relatív permeabilitás ennek megfelelően csak egy kicsit kisebb egynél: $\mu_r = 1 + \chi \approx 0{,}9999...$

Mivel χ negatív, a közegbeli $\vec{B}$ indukció lecsökken a vákuumbeli $\vec{B_o} = \mu_o \vec{H}$ indukcióhoz képest. Ez a csökkenés nagyon kicsiny mértékű. Az ilyen anyagok atomjai külső mágneses mező nélkül nem rendelkeznek mágneses dipólnyomatékkal. Az elektronok pálya- és saját- mágneses momentumaik lerontják egymást. Külső mező hatására ez a helyzet felborul, ilyenkor az egyik elektron felgyorsul, a másik lelassul, és ezáltal az atomnak eredő mágneses dipólnyomatéka keletkezik. A jelenség a hőmérséklettől független.



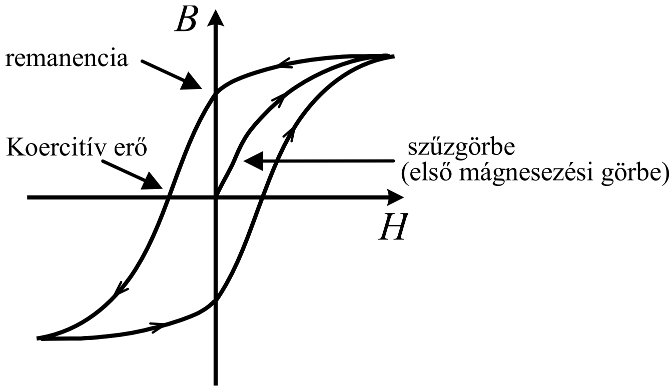
Rúdmágnes és diamágneses, ill. paramágneses anyag kölcsönhatása

Paramágnesség: A nemesgázok azért diamágneses tulajdonságúak, mert lezárt elektronhéjaik vannak. Ha ehhez még egy elektront hozzáveszünk, akkor annak a mágneses momentumát nem kompenzálhatja a többi elektron, tehát az alkálifémek (nátrium, kálium…) paramágnesesek. Ezen felül paramágneses anyagok pl. az alumínium, platina, volfrám, oxigén. Külső mágneses tér nélkül adott T hőmérsékleten $\vec{M} = 0$, mert a spontán momentummal rendelkező atomok hőmozgást végeznek és a rendezetlen transzlációs és forgó mozgás következtében a térfogategységben a mágneses momentumok kiátlagolódnak. Külső mező híján ezek az anyagok sem mutatnak mágneses tulajdonságot. A felfüggesztett alumínium golyót az állandó mágnes vonzza. Ebben az esetben az anyag atomjainak külső mágneses mező nélkül is van eredő mágneses dipólnyomatékuk, de külső mező híján ezek rendezetlenül állnak. A mágneses mező az atomi dipólusokat a maga irányába forgatja, mégpedig annál inkább minél erősebb az alkalmazott mágneses mező, és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ezt a jelenséget rendeződési polarizációnak nevezzük. Ilyenkor $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{M}$, a szuszceptibilitás pozitív: $\chi \approx 10^{-3} - 10^{-6}$, vagyis a vákuumbeli indukcióhoz képest ilyenkor (kismértékben) növekszik az indukció. A hőmozgás a momentumok rendeződését gátolni igyekszik, ennek következtében a szuszceptibilitás a növekvő hőmérséklettel reciprokosan csökken:

$$\chi \sim \frac{1}{T}$$

Ezt az arányosságot Curie-törvénynek hívják.

Ferromágnesség: Egyes anyagok erősen mágnesezhető anyagok, a mágneses mezőből kiemelve többé-kevésbé megőrzik a mágnesességüket. Ilyenek pl. a vas, kobalt, nikkel és ezek ötvözetei, de olyan anyagok is lehetnek ferromágnesesek, amelyeknek egyik összetevője sem az, pl. króm-dioxid. A ferromágneses anyagok (és általában a mágnesesen rendezett szerkezetek, pl. ferrimágneses, és antiferromágneses anyagok, stb.) mind szilárd anyagok és mágneses szempontból többnyire anizotropok, a $\vec{B}$, $\vec{H}$, és $\vec{M}$ vektorok nem esnek egy egyenesbe, ettől a továbbiakban az egyszerűség kedvéért eltekintünk. A ferromágneses anyagot külső mágneses mezőbe helyezve, az $\vec{M}$ mágnesezettség a $\vec{H}$ térerősség növelésével eleinte igen gyorsan nő, de csak egy bizonyos határig, utána telítődés következik be. Az ilyen anyagok esetén tehát a lineáris anyagegyenlet nem használható. A *B* és *H* közötti összefüggés nemcsak nem lineáris, de nem is egyértékű. Kísérletileg meghatározható a mágnesezési vagy hiszterézis-görbe.



Ferromágneses anyag hiszterézis görbéje

Az origóból indulunk, ahol a mágneses tér és a mágnesezettség is nulla, vagyis H=0, M=0, $\vec{B} = \mu_o\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = 0$. Ha H növekszik, vele a B is növekszik, először gyorsan, majd a telítéshez közeledve egyre lassabban. Egy bizonyos H-nál már az összes elemi mágneses dipólus egy irányban áll, így M tovább nem növelhető. Ezt telítési mágnesezettségnek nevezzük. Ha most a H-t csökkenteni kezdjük, B is csökken, de nem ugyanazon a görbén halad visszafelé, vagyis a $\mathrm{H} + \Delta\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ csökkentés kisebb csökkenést eredményez B-ben, mint a $\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H} + \Delta\mathrm{H}$ növelés. Hogy mennyivel kisebbet, az többek között az anyagi minőségtől függ. Amikor H már nullára csökkent, az M és így a B még mindig nem nulla, M értékét remanens mágnesezettségnek vagy remanenciának nevezik. Az olyan anyagokat, amelyeknek számottevő a remanens, azaz visszamaradó mágnessége, permanens mágneseknek nevezzük, ilyen például az acél. Ahhoz, hogy M nullára csökkenjen, ellenkező irányú H-t kell alkalmazni, ezt koercitív erőnek nevezzük. Tovább növelve az ellenkező irányú H-t, újra telítés következik be, stb.

Az összetartozó *B* és *H* értékek hányadosából kiszámítható μ vagy χ már nem állandó (azaz nem csak a minta összetételétől függ), hanem függ a *H*-tól és a minta előéletétől. A vasnál μ_r és így χ tipikusan több száz, de egyes speciális ötvözeteknél μ_r akár egymillió fölött is lehet. Ha a ferromágneses anyag hőmérsékletét növeljük, akkor egy bizonyos T_C hőmérséklet, az úgynevezett Curie-hőmérséklet fölött a ferromágneses anyagok paramágneses anyagokká válnak. A vas Curie-hőmérséklete 769°C, a kobalté 1075°C, a nikkelé 360°C. Ha az anyagot a paramágneses tartományból kiindulva hűtjük, a szuszceptibilitás növekszik:

$$\chi \sim \frac{1}{\mathrm{T} - \mathrm{T_c}}$$

Ezt Curie-Weiss törvénynek nevezik. A T_c Curie-hőmérsékleten (más szavakkal a ferromágneses Curie-pontban) egy másodrendű paramágneses-ferromágneses fázisátalakulás játszódik le. Nincs latens hő és térfogatugrás, a szuszceptibilitás viszont - ahogy az a képletből is kiolvasható - divergál (a gyakorlatban ez akár 10 nagyságrendbeli változást is jelenhet).

Amikor a H változása következtében M változik, energia disszipálódik. Egy cikluson végigmenve az összes irreverzibilisen hővé alakult energia mennyisége egyenlő a hurok területével. Elektromosan vezető ferromágnesekben a hő keletkezésének legfőbb oka az, hogy a változó mágneses tér változó elektromos teret indukál (lásd később az indukció fejezetnél), ezért örvényáramok (és így Joule-hő) keletkeznek. Ha lassabban változik a mágneses tér, tehát lassabban megyünk végig ugyanazon a hurkon, akkor kisebb térerősség, kevesebb áram indukálódik, azaz a hurok területének csökkennie kell. Tehát a hurok alakja nem csak a konkrét mintától, hanem a H változási gyorsaságától is függ.

Mindezek magyarázata az, hogy a ferromágneses anyagokban nagy tartományon ugyanabban az irányban állnak a mágneses momentumok, ha a hőmérséklet kisebb, mint a Curie-hőmérséklet, ami elég nagy is lehet! Ha az atomok között csak mágneses kölcsönhatás lenne (mint a paramágneseknél), akkor ez csak 1K alatt következhetne be. Van tehát még egy, kvantummechanikai eredetű kölcsönhatás, melynek energiája:

$$E = -J\sum \vec{m}_i \vec{m}_j$$

Ezt Heisenberg-kölcsönhatásnak nevezik, az összegzést általában az összes olyan m_i és m_j atomi momentumra veszik, amelyek egymással szomszédosak. Ha J>0, akkor a momentumok párhuzamos beállása a legkedvezőbb energetikailag. Ha történetesen J<0, akkor a szomszédos momentumok ellentétesen állnak be (pl. mint a sakktábla színei), ekkor az anyag antiferromágneses. Ilyen pl. nem túl magas hőmérsékleten a króm és a mangán.
A ferromágneses anyagoknak azt a tartományát, amelynek mágnesezettsége egyirányú, doménnek (domain) nevezzük. A domének 10^{-9}-10^{-12} cm^3 térfogatú tartományok ~10^{15} számú atommal. Egy-egy domén telítésig mágnesezett, de külső tér híján a domének mágnesezettsége rendezetlen, a szomszédos domének gyakran ellentétesen mágnesezettek, így a makroszkopikus minta össz-mágnesezettsége lényegében zérus[1]. Ha elkezdjük növelni a külső mágneses teret, akkor azon domének térfogata kezd nőni, amelyek mágnesezettségének iránya kis szöget zár be a külső mágnesező tér irányával. Ezt a jelenséget nevezzük faleltolódásnak. A faleltolódásokat a különféle rácshibák, pl. szennyező atomok fékezik. Nagy mágnesező tér esetén egy másik, irreverzibilis effektus is fellép, egy-egy domén mágnesezettsége ugrásszerűen befordulhat a külső mező irányába. A domének mágnesezettségének ugrásszerű változásait Barkhausen-ugrásoknak nevezzük. Mivel ekkor elektromos feszültség is indukálódik, ezt ki lehet vezetni egy hangszóróra, így az ugrások sistergő, sercegő zajként hallhatóak, ezt Barkhausen-zajnak nevezzük. Az újabb kutatások szerint ilyenkor egy domén hirtelen árfordulása lavinaszerű átfordulásokat indít meg a környező doménekben és valójában ezek összesített hatásából származó zajt halljuk. A telítettséget akkor éri el az anyag, ha már minden elemi momentum a tér irányában áll, az egész anyagdarab egyetlen doménnek tekinthető.

Alkalmazások:
A ferromágneses anyagokat igen sok helyen alkalmazzák, pl. villamos gépekben is.
1. **Állandó mágnes:** olyan anyagot célszerű választani, amelynek a remanenciája nagy (és lehetőleg a koercitív erő sem túl kicsi).
2. **Elektromágnes**: ide épp ellenkezőleg, kis remanenciájú anyagra van szükség. Ha ezeket pl. egy tekercsbe teszik és a tekercsben áram folyik, a mágnesezettség nagyra nő és az elektromágnes fel tud emelni egy vasdarabot. Ha az áramot kikapcsolják, a mágnesezettségnek töredékére kell csökkennie, különben nem tudnák leszedni róla a rátapadt vasat.
3. **Transzformátor** – mint később látni fogjuk – két tekercsből áll, amely közös vasmagon van. Ha az egyik (a primer) tekercsben növekvő áramerősség folyik, ott növekszik a H is, a vasmag miatt ott és a másik (a szekunder) tekercsben is nő a B, ez pedig a szekunder tekercsben elektromos térerősséget indukál. Így alakítják át a különböző feszültségeket egymásba. Alacsony ára miatt a lágyvas használata a legelterjedtebb. Jellemző rá nagy relatív permeabilitása –kb. 2000-, melyből adódóan ugyanazon értékű mágneses indukció létrehozásához csupán század annyi gerjesztőáram szükséges a tekercsekben, mint például légmagos tekercselés esetén. Mint azt említettük, a ferromágneses anyagok B-H diagramjában egy cikluson végigmenve az irreverzibilisen hővé alakult energia mennyisége egyenlő a hurok területével. Váltakozó áram

[1] A domének nem keverendőek össze a szemcsékkel. Utóbbiakban az atomok helyzete periodikusan ismétlődik és a szemcsehatáron ez megtörik, a doménekben az atomi mágneses momentumok állnak egy irányban, a szomszédos doménben pedig egy másik adott irányban. Két domént egy doménfal választ el, amely jóval szélesebb, mint a szemcsehatár.

esetén annak egy periódusa alatt megtörténik a hurok körüljárása a változó áramirány miatt. Így minden periódusban energiaveszteség lép fel, mely energia melegíti a vastestet. Ezekből adódóan a gyakorlatban a cél az, hogy minél kisebb hurokterületű anyagot használjanak a villamos gépekben; tehát olyan anyagokat amelyek remanenciája közelítsen a 0-hoz.
Mivel a veszteségeket (melegedést) nagymértékben az örvényáramok okozzák, így ezek ellen lehetőség szerint védekezni kell. Egyik mód a vastest lemezelése. Ekkor az áramirányokra merőlegesen mintegy „felszeletelik”, lemezelik a vastestet. A lemezek vastagsága általában 0.25-2mm. Lemezelésnél fontos az egyes lemezek között szigetelőanyagot elhelyezni, hogy két lemez között a felületeiken keresztül áram ne folyhasson. Ezt általában vékony lakkréteggel oldják meg. Egy másik módja az örvényáramú veszteségek csökkentésének, ha nagyobb elektromos ellenállású anyagot használunk. Ezt a gyakorlatban a vas 3% szilíciummal történő ötvözésével érik el.
4. **Adattárolás:** az állandó mágnesekhez hasonló tulajdonságú anyagok kellenek. Korábban nagy jelentősége volt pl. a vasoxid (vagy króm-dioxid) réteggel beborított műanyag magnószalagoknak, floppy-lemezeknek. A merevlemezek (winchesterek) is hasonló, a hiszterézis jelenségén alapuló módszerrel tárolják az adatokat.

A földtani szerkezetek vagy egyes nyersanyag-telepek (vasérc) által előidézett anomáliák nagysága a kőzetek mágneses tulajdonságainak függvénye. A mágneses geofizikai mérések tervezésében fontos a mágnesezettség ismerete, ugyanis ez alapján dönthető el, hogy a kutatott földtani test mágneses mérési módszerekkel kimutatható-e vagy sem. A mágneses anomáliák kialakításában mind az indukált, mind a remanens mágnesezettség fontos szerepet játszik.

Tapasztalatok szerint a kőzetek mágnesezettsége kevés ásvánnyal van összefüggésben. Ezek két csoportba oszthatók: vas-titánoxidokra (magnetit, ilmenit, hematit, limonit) és vasszulfidokra (pirit, pirhotin). Ezek közül a magnetitnek van kimagaslóan nagy szerepe a szuszceptibilitás kialakításában.

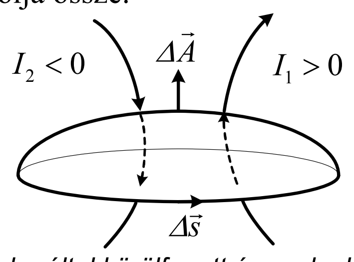
A fentiekből következik, hogy általában a magmás és metamorf kőzetek rendelkeznek nagyobb szuszceptibilitással. Az üledékes kőzeteké lényegesen kisebb, a legtöbb esetben el is hanyagolható.

Mágneses tér gerjesztése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény: Korábban említettük, hogy mozgó töltések mágneses mezőt hoznak létre. A mérési tapasztalatok alapján felállított Ampère-féle gerjesztési törvény vékony vonalas áramok esetén azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével:

$$\oint_g \vec{H} d\vec{s} = \sum_j I_j$$

Az áramerősségek algebrai összegénél az előjelezésre azt a szabályt használjuk, hogy az az áram, amelyik a felületet a felület normálisának irányában döfi pozitív, amelyik azzal ellentétesen döfi, az pedig negatív. Megállapodás szerint, a peremgörbe körüljárási irányát és a felületi normális irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze.



A zárt görbe által körülfogott áramok előjelezése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény írja le az áram és az általa gerjesztett mágneses mező közötti összefüggést. A mágneses mező tehát még stacionárius esetben sem konzervatív. Tapasztalati tény, hogy a gerjesztési törvény akkor is érvényben marad, ha térben mágnesezhető anyagok vannak jelen. A gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$. Az áramba bele kell számítani nem csak a konduktív áramot (vezetési áram, ami pl. a fémekben folyik), hanem a konvektív áramot is. Tehát pl. pozitív ionok áramlanak vákuumban, akkor is mágneses tér gerjesztődik.

Határfeltételek (peremfeltételek): A mágneses Gauss-törvényből és az Amper-féle gerjesztési törvényből levezethető, hogyan viselkednek a mágneses mennyiségek két közeg határfelületén:

$$H_{1t} = H_{2t},$$

azaz a két közeg határán a mágneses térerősség tangenciális koordinátája folytonos (ez csak akkor igaz, ha nincsenek a felületben folyó áramok) és

$$B_{1n} = B_{2n},$$

azaz a két közeg határán a mágneses indukció normális koordinátája folytonos. Az elektromos indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen azért szenvedett ugrást, mert ott elektromos töltések voltak. Mágneses töltések nincsenek, ezért a mágneses indukció normális koordinátája a két felület határán folytonos.

Hosszú egyenes vezető mágneses tere: Szimmetria-okokból következik, hogy a térerősség értéke csak a vezetőtől mért távolságtól függ. Az erővonalak körülfogják az áramot, tehát a vezetőre merőleges síkokban fekvő koncentrikus körök, középpontjukban a vezetővel. Ekkor, ha egy ilyen körvonal mentén integrálunk, a $\vec{\mathrm{H}}$ nagysága állandó, iránya párhuzamos az ívelemmel, így H kihozható az integráljel elé:

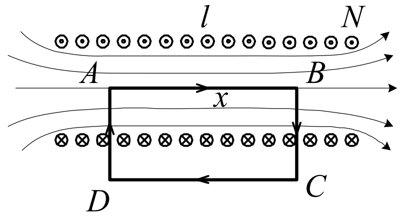
$$\oint_g \vec{H}d\vec{s} = H\oint_g ds = H \cdot 2r\pi = \mathrm{I},$$

azaz

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{I}}{2\mathrm{r}\pi}$$

vagyis a mágneses tér erőssége a távolsággal fordítottan arányos..

Szolenoid mágneses tere: tekintsünk egy, az átmérőjéhez képest hosszú, sűrűn csévélt hengeres tekercs mágneses terét. A mező homogénnek tekinthető a tekercs belsejében. A tekercs hosszát jelölje *l*, a menetszám legyen *N*, és legyen *A,* a keresztmetszet. Ekkor az egységnyi hosszra jutó menetek száma $\frac{N}{l}$. A tekercsben folyó áramerősség *I*. Egy alkalmasan megválasztott zárt görbére írjuk fel a gerjesztési törvényt. A zárt görbe legyen az *ABCD* téglalap, *x* az AB oldal hossza.



A szolenoid tekercs és mágneses mezeje

A zárt görbére történő összegzést felbonthatjuk négy nyílt görbére történő összegzésre:

$$\oint_g \vec{H}d\vec{s} = \int_A^B \vec{H}d\vec{s} + \int_B^C \vec{H}d\vec{s} + \int_C^D \vec{H}d\vec{s} + \int_D^A \vec{H}d\vec{s}$$

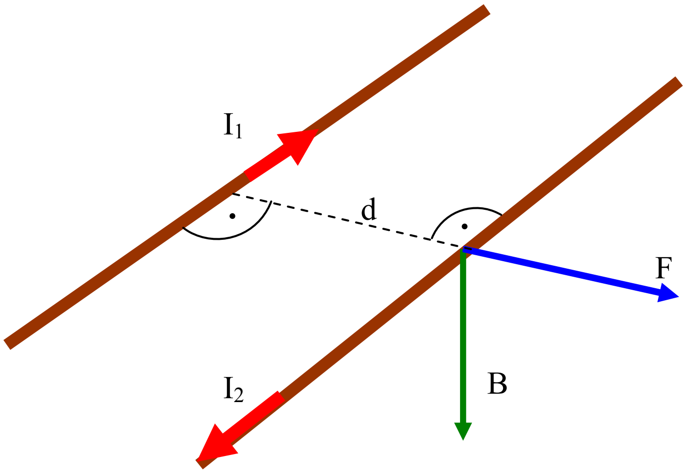
A téglalap esetében a DC szakaszon a tér közelítőleg nulla (mivel hosszú és vékony a tekercs), az AD és a BC szakaszon pedig a tér iránya merőleges a görbére, így az összeg csak az AB oldalra nem tűnik el. Ebből: $Hx = \frac{N}{l}xI$, azaz $H = \frac{NI}{l}$, így a mágneses indukció:

$$B = \mu \frac{NI}{l}.$$

Vagyis a mágneses indukció a tekercs belsejében az egységnyi hosszra eső menetszámmal arányos.

5X. Mekkora erővel hat egymásra két 12m hosszú és egymástól a levegőben 10cm távolságra lévő gyűjtősín rövidzárlat idején, ha azokban a zárlati áram 20kA értékű (μ_0=4π·10^{-7}Vs/Am)?

Megoldás: Mivel a két sín hossza jóval nagyobb, mint a távolságuk, a mágneses tér számításakor a végtelen hosszú egyenes vezető mágneses terére vonatkozó $H = \frac{I}{2r\pi}$ közelítést használjuk, tehát az egyik sínben folyó áram által gerjesztett mágneses indukció értéke a másik sín helyén: $B = \frac{\mu_0 I_1}{2r\pi}$. Az ábrán a jobb oldali sín helyén $\vec{B}$ lefelé mutat.

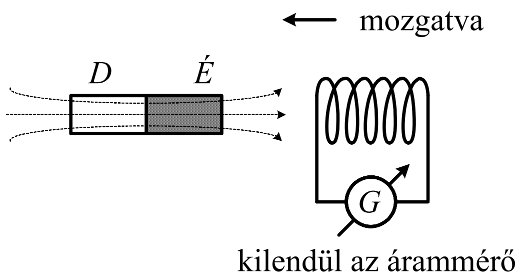


A másik sínre az Amper-erő hat, melynek értéke: $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot l$. Mivel mindkét sínben azonos a zárlati áram értéke, ezért $I_1 \cdot I_2 = I^2$. Tehát a fellépő erő: F=9600N. A bal oldali sínre ható erő az ábrán jobbra mutat, a jobb oldalira nyilván balra hat az Ampere-erő. Általánosan is igaz, hogy párhuzamos vezetők vonzzák egymást, ha azonos irányban folyik bennük az áram és taszítják, ha ellentétes irányban folyik.

Az elektromágneses indukció

Azt már tudjuk, hogy ha egy mágneses mezőben lévő vezetőben áram folyik, akkor a vezetőre erő hat (Ampère-erő) és az mozgásba lendül. Kérdés, hogy ha mágneses mezőben vezetőt mozgatunk, akkor indukálódik-e áram, ill. általában hogyan tudunk mágneses úton áramot előállítani.

Mozgási indukció: Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat. Ezt az erőt korábban idegen erőnek neveztük: $\vec{F}_* = q\vec{v} \times \vec{B}$.

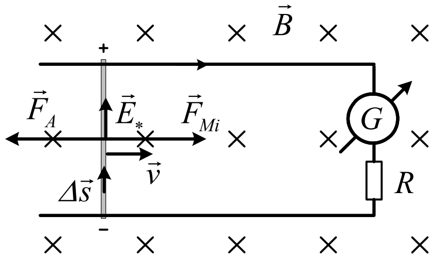


Mozgási indukció jelensége

Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$. A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}, \Delta\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat lineáris generátornak is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát (a rúd sebessége merőleges a mágneses indukcióvektorra és a rúdra), az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right) d\vec{s} = \mathrm{v} B \ell$$

A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R, akkor I=ε/R. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen (ez a Lenz-törvény megnyilvánulása), így azt egy $\vec{F}_{\mathrm{h}}$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

A fenti elrendezésnél ℓ a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h. Ekkor a hurok területe $A = \mathrm{h}\ell$, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége v=-dh/dt, de mivel ℓ konstans, $\mathrm{dA/dt=d(h}\ell\mathrm{)/dt=-}\ell\mathrm{v}$. Az indukciófluxus változási gyorsasága:

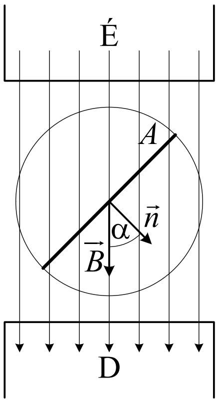
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d(BA)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{B}\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{B}\ell\mathrm{v} = -\varepsilon\,.$$

Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (Fluxus-szabály). A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel. Az is könnyen látható, hogy ha homogén mágneses mezőben egy vezető keret haladó mozgást végez, akkor nem indukálódik benne feszültség.

Váltakozó áramú generátor: Tekintsünk egy téglalap alakú vezető keretet. Keresztmetszete legyen A, és forogjon állandó ω szögsebességgel homogén mágneses mezőben. A mágneses mező indukciója legyen $\vec{B}$. A kezdeti pillanatban legyen $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Először írjuk fel a mágneses indukciófluxust mint az idő függvényét:



Váltakozó áramú generátor

$$\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A} = B\,A \cos\alpha = B\,A \cos\omega t$$

mivel $\alpha = \omega t$. Alkalmazzuk a Faraday-törvényt az indukált elektromotoros erő kiszámítására:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\,A\,\omega \sin\omega t\,.$$

Használjuk az $\mathcal{E}_0$ jelölést az elektromotoros erő csúcsértékére $\mathcal{E}_0 = B\,A\,\omega$, ezzel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t\,,$$

Azaz szinuszos váltakozó feszültség generálódott. Ha egymenetű keret helyett N menetű tekercset alkalmazunk, akkor az erővonalak mindegyik meneten átmennek, vagyis a fluxus (és annak változási gyorsasága) N-szeresére nő. Tehát a váltakozó áramú generátor elektromotoros ereje:

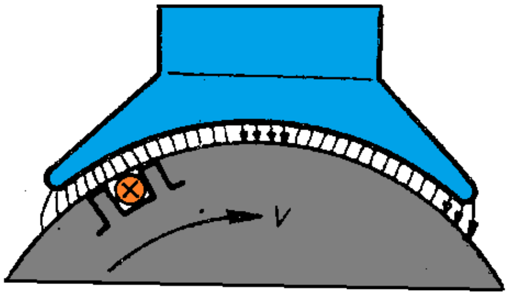
$$\mathcal{E} = N\,A\,B\,\omega \sin\omega t$$

Alkalmazás:

Napjainkban a villamos energia szinte nélkülözhetetlen életünkből. Azonban fontos tudnunk, hogy ezen energiafajta döntő hányadát (kb. 98%) az indukció segítségével állítják elő. A villamos energia előállítására szinte kizárólag szinkrongenerátorokat használnak. Az elnevezés onnan ered, hogy a forgórész és a forgó mágneses mező fordulatszáma megegyezik. Lényegében a fenti ábra megfordításáról van szó: az állórész tartalmazza a tekercseket, a forgórészen pedig állandó mágnes van elhelyezve (gerjesztett vasmagos tekercs). A fenti elrendezés mellőzésének gyakorlati oka van. Ugyanis ha egy forgó testről szeretnénk (galvanikus úton) elektromos teljesítményt levenni, akkor azt pl. csúszógyűrűkkel valósíthatjuk meg, melyekhez szénkefék csatlakoznak. Azonban ily módon nagyfeszültséget szikramentesen levenni igen nehéz. Tehát a gyakorlatban a forgó állandó mágnes egy forgó mágneses mezőt hoz létre, amely a külső álló tekercsekben feszültséget indukál. Ezt a feszültséget később feltranszformálják, majd a villamos hálózatba táplálják. A vízerőművekben pl. a víz forgatja a mágneseket, vagyis a víz helyzeti energiája alakul át elektromos energiává. Ezeket a generátorokat nagyon nagy teljesítményűre is készíthetik: a Kínában épülő Három Szurdok vízerőműbe 26db egyenként 700MW-os szinkrongenerátort építenek be, tehát az együttes teljesítmény 18200MW. Csupán az arányok kedvéért megjegyezzük, hogy a Paksi Atomerőmű 4 blokkjának együttes villamos teljesítménye 2000MW.

1. Példa mozgási indukcióra:

A következő ábrán egy kiálló pólusú gép látható: kék-kiálló pólus; szürke-forgórész, mely tartalmazza a narancssárga színnel jelölt tekercseket (ez esetben a tekercs 1 menetes).



A pólus és a gép forgórésze között egy szűk légrés található, melyben az indukcióvonalak közel párhuzamosak és állandó sűrűségűek. Így itt egy B indukciójú homogén mágneses tér alakul ki. A forgórész külsején, annak tengelyével párhuzamosan vezetők találhatóak, melyek tengelyirányú hossza l. Ha a forgórész forog, akkor a benne elhelyezett vezetők v_k kerületi sebességgel fognak haladni a rögzített pólushoz képest. A sebesség iránya pontosan merőleges lesz a vezetők irányával, mivel azok párhuzamosak a tengellyel. Továbbá mind a vezető, mind annak sebessége merőleges lesz az indukcióvonalakra. Így a mozgási indukció törvénye alapján a pólus alatt való elhaladásakor elektromotoros erő (elektromos feszültség) fog indukálódni a vezetőben. Mivel mindhárom komponens kölcsönösen merőleges egymásra, így felírható az $E=v_kBl$ összefüggés.

Feladat: Számítsuk ki, hogy mekkora maximális feszültség indukálódik a pólus alatt elhaladó, a tengelytől r=10 cm távolságban lévő l=40 cm hosszúságú vezetőben, ha a forgórész n=2950 r/min fordulatszámmal forog, és a pólusnál B=1,2 T a mágneses indukció. Mekkora áram fog folyni a vezetőben és mekkora lesz a villamos teljesítmény, ha az egy R=0,4 Ω-os áramkör része? Mekkora erő és mechanikai teljesítmény szükséges az árammal átjárt vezető mágneses térben való mozgatásához?

A megoldáshoz elsőként a már fentebb leírt összefüggést kell alkalmaznunk, bár most a maximális indukált feszültséget kell meghatároznunk. Ez a feszültség akkor alakul ki, amikor a vezető a pólus alatti homogén térben halad. Akkor ugyanis, amikor a vezető közelíti, vagy épp elhagyja a pólust, szórt indukcióvonalakat metsz (az ábrán a pólus széleinél láthatóak) melyek szintén indukálnak benne feszültséget. Ezen feszültségek értéke azonban kisebb a maximálistól, mivel itt kisebb az indukció értéke. Továbbá szükséges még a kerületi sebesség ismerete. Ez azonban könnyen kiszámítható a fordulatszám és a sugár ismeretében:

$$v_k = 2r\pi \cdot \frac{n}{60} = 30,89\frac{m}{s}.$$

Tehát az indukált maximális feszültség:

$$E = v_k Bl = 14,828V.$$

Ez a feszültség a vezetőben Ohm törvénye alapján I=37,07A áramot fog hajtani. Ekkor a villamos teljesítmény:

$$P_{vill} = U \cdot I = 549,67W.$$

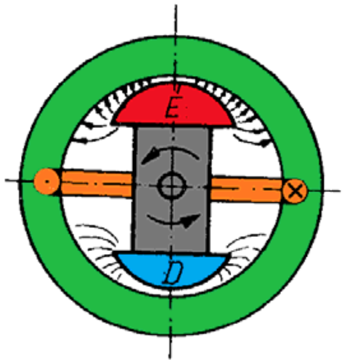
Az I árammal átjárt l hosszúságú vezető B homogén mágneses mezőben való mozgatásához $F=BIl=17{,}794$N erő szükséges (Ampere-erő), mivel a tényezők iránya merőleges egymásra. Ekkor a mozgatáshoz szükséges mechanikai teljesítmény:

$$P_{mech} = F \cdot v_k = 549,68W.$$

Látható, hogy a mechanikai és a villamos teljesítmény kerekítési hibáktól eltekintve megegyezik. Ez az energia-megmaradás miatt szükségszerű is.

2. Példa mozgási indukcióra:

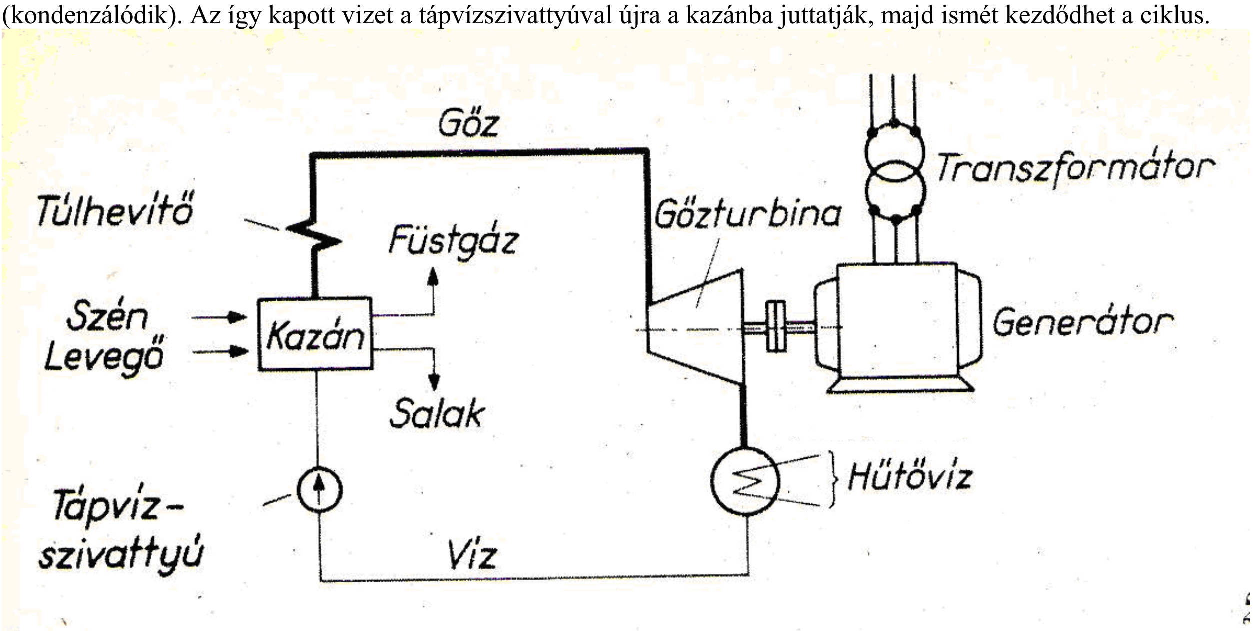
A képen látható szinkrongép részei: állórész (zöld színnel); ezen helyezkedik el a narancssárga színnel jelölt tekercs (esetünkben egy menetes, a menet téglalap alakú, az ábra síkjában fekvő oldal hossza *a*, a merőleges oldalé pedig *b*); szürke-forgórész, mely tartalmazza az állandó mágnest. Tegyük fel, hogy egy kétpólusú állandó mágnesből készített 3000/min fordulatszámú forgórész B= 1,1T maximális indukcióval szinuszos mágneses teret kelt a gépben. Mekkora az állórész egy menetében indukált maximális feszültség, ha az oldalának hatásos hossza *b*=20cm és ezek az oldalak egymástól *a*=15cm távolságra vannak?



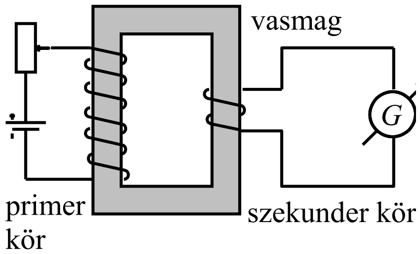
Egymenetes állandó mágnes forgórészű szinkrongenerátor

Megoldás: a menetben a maximális feszültség akkor indukálódik, amikor az állandó mágnesek éppen annak hatásos oldalainál (melyek párhuzamosak a gép tengelyével) haladnak el. Ekkor maximális a mágneses indukció értéke a menetnél. Az indukált feszültség maximális értéke $U_{max}=B_{max}\cdot l\cdot v$, ahol l a menet hatásos hossza, v pedig a menet mágneses térhez viszonyított relatív sebessége (esetünkben a menet mozdulatlan, a mágneses tér mozog). Ez a sebesség (a kerületi sebesség) a menetnél a forgórész fordulatszámából és a menetrész tengelytől mért távolságából számolható: $v=2\cdot r\cdot\pi\cdot n/60=2\cdot(0{,}15/2)\cdot\pi\cdot 3000/60=23{,}562$m/s. Az indukált feszültség maximális értéke: $U_{max}=B_{max}\cdot l\cdot v=1{,}1\cdot 0{,}2\cdot 23{,}562=5{,}184$V. Ez az érték azonban csak a fele az összes indukált feszültségnek, mivel egy időben az átellenes oldalon, a menet másik hatásos oldalán is ekkora feszültség indukálódik. Így a teljes menetben indukált feszültség: $U_{ind}=2\cdot U_{max}=10{,}367$V.

Hőerőmű: A következő ábrán a hőerőművekben legelterjedtebben használt energiaátalakítási folyamat látható. Az ábra segítségével megérthető, hogy hogyan alakul át a fosszilis energiahordozó (pl. szén) kémiai energiája villamos energiává, mely a villamoshálózaton keresztül otthonunkba jut. Az energiahordozót kazánokban égetik el, így magas hőmérsékletű füstgázok képződnek. Ezek segítségével vizet forralnak el. Ezután a vízgőzt a túlhevítőben tovább melegítik, ezzel is növelve annak fajlagos energiatartalmát. Ezt a nagy hőmérsékletű (kb.540°C) vízgőzt hőszigetelt csöveken a turbinához vezetik. A turbinán keresztülhaladva a vízgőz expandál (tágul), és a turbinalapátokon munkát végez. Így a turbina a vízgőz energiájának nagy részét mechanikai energiává, forgássá alakítja. A turbina tengelye szinkrongenerátorhoz kacsolódik. A generátorban a betáplált mechanikai energia a **mozgási indukció** elvét felhasználva elektromos energiává alakul át. A generátor a **kölcsönös indukció** elvét alkalmazó transzformátorral van összekötve, mely a generátor feszültségét a gazdaságos szállíthatóság érdekében feltranszformálja (azaz az áramot letranszformálja). A turbinából kilépő fáradt gőzt a hűtővíz segítségével újra folyadékká alakul (kondenzálódik). Az így kapott vizet a tápvízszivattyúval újra a kazánba juttatják, majd ismét kezdődhet a ciklus.



Nyugalmi indukció: Tehát egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a mágneses indukciófluxus, azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.

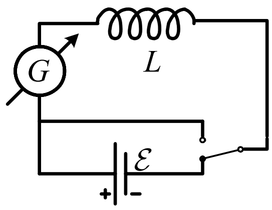


A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége. A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget kölcsönös indukciónak nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Tekintsük most a következő elrendezést:



A nyugalmi indukció jelensége, önindukció

A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő mutatója nem ugrik rögtön a nullára (mint ahogy tekercs nélkül tenné), hanem egy ideig még fokozatosan csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenséget önindukciónak nevezzük, ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

Összegezve, a Faraday-féle indukciótörvény tömör alakja:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahol $\Phi = \int_F \vec{B}d\vec{A}$ a mágneses indukciófluxus. Részletesebben kiírva:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az indukció miatt létrejött áram az őt létrehozó hatással (a mágneses tér változásával) ellentétes hatást fejt ki, azaz ha a mágneses fluxus csökken, akkor olyan irányú áram indukálódik, amely a fluxust növeli, így az nem csökken olyan gyorsan, mint indukció nélkül tenné (lásd a fenti példát). Ezt a szabályt Lenz-törvénynek is nevezik. Ha nem lenne ott a negatív előjel, az indukció növelné az őt létrehozó hatást, akkor öngerjesztő folyamat indulna be, amely ellentmondana az energia-megmaradás törvényének.

Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező - épp ellenkezőleg - forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója: Amint azt korábban levezettük, egy hosszú vékony tekercsben a mágneses térerősség és a mágneses indukció:

$$H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu\frac{NI}{l}$$

Írjuk fel az egyetlen menet által körülfogott fluxust (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int_A \vec{B}d\vec{A} = BA = \mu\frac{NA}{l}\mathrm{I}$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu\frac{N^2A}{l}I$$

A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal: $\Phi = LI$. Az arányossági tényező definíció szerint L, az önindukciós együttható, ami szolenoidra:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

Az önindukciós együttható mértékegysége: $[\mathrm{L}] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{henry} = 1\mathrm{H}$

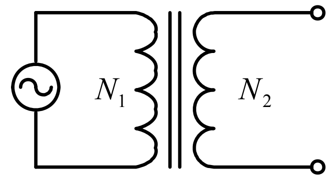
Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Tehát a tekercsben indukálódott feszültség arányos az áram változási gyorsaságával és az önindukciós együtthatóval. Utóbbiban benne van a menetszám négyzete (ezért van sok menete a tekercseknek) és a permeabilitás (ezért szoktak vasmagot tenni a tekercsekbe).
Mivel L arányos N^2-tel, sokmenetű tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.
A tekercsben lévő mágneses mező energiája az 1/2BH energiasűrűség és az $A\ell$ térfogat szorzata, azaz $E_m = \frac{1}{2}\frac{NI}{\ell}\cdot\mu\frac{NI}{\ell}\cdot A\ell = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2A}{\ell}I^2 = \frac{1}{2}LI^2$.

A geofizikában a mágneses tér mérésének egyik igen gyakran alkalmazott eszköze, a protonprecessziós magnetométer a mágneses indukció jelenségét használja ki. Működési elve igen egyszerű: hidrogén-atommagok mágneses térben előálló precesszióján alapszik. Az érzékelő elem egy kb. fél literes, víztartalmú, henger alakú, műanyag edény. Nyugalmi állapotban a vízben lévő H-atommagok mágneses momentumai a földi térrel parallel vagy antiparallel helyzetben vannak. A henger palástján lévő szolenoid tekercsben egyenárammal a földi térre közel merőleges mágneses teret hoznak létre. Ekkor az edényben lévő H-atommagok mágneses momentumai a tekercs által létrehozott mágneses térnek megfelelő irányba állnak be. Az áram kikapcsolása után a H-atommagok mágneses momentumai precessziós mozgást végeznek – a pörgettyűhöz hasonlóan - a földi mágneses tér iránya körül, ami a tekercsben váltakozó feszültséget indukál. A váltakozó feszültség frekvenciája egyenesen arányos a mérni kívánt mágneses térerősséggel.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén: Tekintsünk két nyugalomban lévő tekercset egymás közelében. A primer tekercs menetszáma legyen N_1, a szekunder tekercsé pedig N_2. Ha a primer tekercsben folyó áram I_1, akkor az indukció:



A kölcsönös indukció szoros csatolás esetén

$$B_1 = \mu \frac{N_1 I_1(t)}{l}$$

a menetfluxusa pedig:

$$\Phi_1 = \mu \frac{N_1 A}{l} I_1(t)$$

A szoros csatolás azt jelenti, hogy a primer tekercs menetfluxusa egyben a szekunder tekercs menetfluxusa is (vagyis az indukcióvonalak közösek), így a szekunder tekercs teljes fluxusa:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_1 = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)$$

A kifejezésből kiolvasható, hogy a szekunder tekercs fluxusa arányos a primer árammal, az arányossági tényező *M*, a kölcsönös indukció együtthatója: $\Phi_{12} = M I_1$, ahol

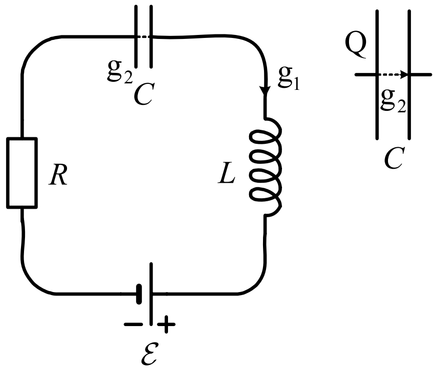
$$M = L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

A szekunder tekercs kapcsain az indukált feszültség:

$$U_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

A jelenséget azért is nevezik kölcsönös indukciónak, mert visszafele is működik (a fenti okoskodás fordított szereposztásban is végigvihető), mi több, L_{12}=M=L_{21}.

A huroktörvény általánosítása váltóáramra egyetlen hurok esetén: Tekintsük egy olyan hurkot, amely egy ellenállást, egy kondenzátort, egy tekercset, és egy áramforrást tartalmaz. Legyen *R* a teljes kör ellenállása, *C* a kondenzátor kapacitása, *L* a tekercs (és egyben az egész hurok) önindukciós együtthatója, illetve $\mathcal{E}$ az alkalmazott elektromotoros erő.



Huroktörvény általánosítása

Íjuk fel a nyugalmi indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\left(\int_A \vec{B} d\vec{A}\right)}{dt}$$

Mivel a tekercs önindukciós együtthatója egyben a kör indukciós együtthatója is:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -L\frac{dI}{dt}$$

A *g* zárt görbét az ábrán látható módon bontsuk fel két részre, g_1 haladjon a vezetőben, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben. A g_2 görbén a térerősség integrálja nem más, mint a kondenzátoron eső feszültség, Q/C. Így ha a térerősségre vonatkozó összegzést a g_1, g_2, szakaszokra külön kiszámoljuk, akkor az alábbi egyenletet nyerhetjük:

$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

A Kirchhoff-hurokegyenlet általánosítása soros *RLC* körre:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tekercs rákapcsolása állandó feszültségre: Legyen a tekercs L induktivitása állandó, a kör ohmos ellenállása R, az áramforrás állandó elektromotoros ereje ε. A kapcsolót a t=0 időpillanatban zárjuk. Kérdés, hogyan változik az I áramerősség. Ha hirtelen (Δt=0 idő alatt) nulláról I>0 értékre nőne, akkor dI/dt és ezzel az indukált feszültség végtelen nagy lenne, ami lehetetlen. Következésképp I(0)=0. A differenciálegyenlet:

$$IR - \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Egy szétválasztható típusú, integrálva:

$$\int_0^I \frac{dI}{\varepsilon - RI} = \frac{1}{L}\int_0^t dt$$

Az integrálást elvégezve:

$$\frac{1}{R}\ln\frac{\varepsilon - RI}{\varepsilon} = -\frac{1}{L}t$$

R-rel átszorozva, e-adra emelve kifejezhető az áramerősség:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Felhasználtuk, hogy t=∞-re I_∞= ε/R-nek adódik. Vezessük be a τ =L/R mennyiséget, amelyet időállandónak vagy a kör relaxációs idejének is neveznek. Ezzel az áramerősség:

$$I(t) = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Az áramerőség tehát exponenciálisan tart a maximális I_∞ értékhez. Ha a tekercset hirtelen lekapcsoljuk az állandó feszültségről, ennek a fordítottja játszódik le, az áram exponenciális függvény szerint tart a nullához: $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Erről úgy győződhetünk meg, ha a fenti levezetést $I(t=0)=I_0$ és ε=0 értékekre megismételjük.

Kondenzátor kisütése: Egy Q töltésre, azaz $U_0=Q_0/C$ feszültségre feltöltött kondenzátort R ellenálláson keresztül kisütünk. A huroktörvény:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0\text{, ahol } I = \frac{dQ}{dt}$$

Idő szerint deriválva és átrendezve kapjuk a differenciálegyenletet az áramerősségre:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-1}{RC}I$$

ahol I_0 a kisütés kezdetekor beinduló áramerősséget jelenti. Ez az egyenlet is szétválasztható:

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = \frac{-1}{RC}\int_0^t dt.$$

A megoldás: $\ln\frac{I}{I_0}=\frac{-1}{RC}t$. azaz

$$I(t)=I_0 e^{-\frac{t}{RC}}=I_0 e^{-t/\tau},$$

ahol τ=RC az RC kör időállandója, $I_0=U_0/R$. Ez azt az időt adja meg, amely alatt *e*-adrészére csökken az áramerősség.

Az itt említett két eset fordítva is hasonlóan játszódik le. Levezethető, hogy ha egy tekercset hirtelen lekapcsolunk a feszültségről (a nyugalmi indukciónál tárgyalt módon), akkor az áramerősség exponenciálisan tart a nullához. Hasonlóan, ha egy kondenzátort hirtelen feszültségre kapcsolunk, fokozatosan töltődik fel. Mindezeket (az alább ismertetettektől eltérően) tranziens jelenségeknek nevezzük, mivel arról szólnak, hogy amikor a külső hatás (az áramforrás feszültsége) hirtelen megváltozik, először egy átmeneti (tranziens) állapban van a rendszer és ezen keresztül fejlődik a végleges állapot felé (amikor konstans az áram). Megjegyezzük, hogy ha ohmos ellenállás nélküli tekercsen keresztül zárunk rövidre egy feltöltött kondenzátort, akkor a harmonikus rezgés differenciálegyenletével analóg egyenletet kapunk, amelynek a megoldása szinuszos/koszinuszos rezgés, ez tehát szigorúan véve nem tranziens jelenség. Ha ebbe a körbe még ohmos ellenállást is iktatunk, azon hő fejlődik, az energia disszipálódik, ezért csillapított rezgést jön létre

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen: Egyenáramot a kondenzátor nem vezeti, de váltakozó feszültség hatására periódikusan feltöltődik és kisül. Így a váltakozó áram folytonosan folyik a körben anélkül, hogy a lemezek közötti szigetelő rétegben töltések áramlanának. Az általános Kirchhoff-hurokegyenletből kapjuk, hogy a kondenzátor U=Q/C feszültsége az áramforrás ε elektromotoros erejével egyenlő. Mivel $\varepsilon(t)=U(t)=U_o\sin\omega t$,

$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\left(CU_0\sin\omega t\right)=CU_0\omega\cos\omega t.$$

Tehát az áramerősség az időnek koszinuszos függvénye. Ez azt jelenti, hogy a feszültség negyed-periódussal később veszi fel pl. a csúcsértékét, mint az áramerősség. Más szavakkal, az áramerősség és a feszültség között π/2 fáziskülönbség van, vagyis az áramerősség 90^o-kal siet a feszültséghez képest. Ez azért lehetséges, mert nem a kondenzátor lemezei között lévő feszültségkülönbség az oka a töltések áramlásának, hanem ennek a feszültségnek a *megváltozása*. A feszültség csúcsértéke U_0, az áramerősségé $CU_0\omega$, a kettő hányadosaként értelmezhetjük a kondenzátor váltóáramú ellenállását, más néven kapacitív ellenállását vagy kapacitanciáját:

$$X_C=\frac{1}{\omega C},$$

Ez, mint látható, függ a frekvenciától és egyenáramra végtelenné válik.

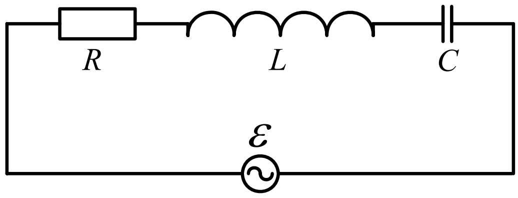
Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen: Ha minden ohmos ellenállást elhanyagolunk, a megoldandó egyenlet: $\mathcal{E}=L\frac{dI}{dt}$, ahol $\varepsilon(t)=\varepsilon_o\sin\omega t$. Idő szerint integrálva kapjuk, hogy $-\varepsilon_0\cos\omega t/\omega=LI$, azaz $I(t)=-\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos\omega t$, vagyis az induktivitáson az áram 90^o-ot késik a feszültséghez képest. A feszültség és az áramerősség csúcsértékének hányadosa a tekercs váltóáramú ellenállása, más néven induktív ellenállása vagy induktanciája:

$$X_L=L\omega$$

Egyenáramra ez nulla, a frekvencia növelésével növekszik.

Váltóáramú RLC-körök

Olyan áramköröket vizsgálunk, amelyekben az ohmos ellenállás mellett tekercs és kondenzátor is van, az áramforrás elektromotoros ereje pedig szinuszosan/koszinuszosan változik



Soros RLC kör

Tekintsük az ábrán látható soros RLC kört, és alkalmazzuk rá az általánosított hurok törvényt:

$$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}$$

Tegyük fel, hogy a váltakozó áramú generátort elektromotoros ereje $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega t$ függvény szerint változik. $\mathcal{E}_0$ a gerjesztő elektromotoros erő amplitúdója ω pedig a körfrekvenciája. A Kirchhoff-féle huroktörvény formálisan teljesen analóg az előző félévben tanult gerjesztett rezgés mozgásegyenletével. Az analóg mennyiségek:

$x \to Q$ a változó

$m \to L$ tehetetlenség

$\kappa \to R$ csillapítás, a rezgés energiája hővé alakul

$D \to \frac{1}{C}$ a rugó, ill. a kondenzátor tárolja az energiát, ami a megnyúlásból, ill. a töltés-felhalmozódásból adódik ($\frac{1}{2}\mathrm{D}x^2$, ill. $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{C}}$, ezek periodikusan átalakulnak az $1/2mv^2$ mozgási és az $1/2LI^2$ mágneses energiává)

$F_0 \to \mathcal{E}_0$ kényszer, energiabetáplálás

$\omega_r=\sqrt{\frac{D}{m}}\to\frac{1}{\sqrt{LC}}$ sajátfrekvencia, $\omega=\omega_r$ esetén rezonancia következik be.

Az RLC köröket vizsgálva minket jobban érdekel az áramerősség, mint a kondenzátoron lévő töltés, ezért lederiváljuk idő szerint a fenti egyenletet, hogy csak az áramerősség maradjon benne változóként:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=-\mathcal{E}_0\omega\sin\omega t$$

Matematikailag a megoldandó egyenlet inhomogén másodrendű differenciálegyenlet az áramerősségre (az áramforrás adja az inhomogenitást). Ennek általános megoldása két tagból áll: az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásából. A homogén egyenlet általános megoldása csillapított rezgőmozgásnak felel meg. (Ha ohmos ellenállás sincs, akkor – a korábbiak szerint – harmonikus rezgőmozgás jön létre, míg ha áramforrás is van, kényszerrezgésről beszélhetünk.) Mivel nincs áramforrás a homogén esetben, nincs, ami pótolja az ellenálláson keletkező Joule-hőt, ezért csillapodik az áram. Matematikailag ez egy $e^{-\alpha t}$ szorzóként jelenik meg, amely időben exponenciális lecsengést okoz, így az állandósult állapotban csupán a partikuláris megoldásnak megfelelő tag marad meg, a továbbiakban csak ezzel foglalkozunk. Tudjuk, hogy ha az inhomogenitást jelentő függvény ω körfrekvenciájú periodikus függvény, akkor a partikuláris megoldást is ω körfrekvenciájú periodikus függvény alakjában kereshetjük. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a partikuláris (időben állandósult) megoldás a következő:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Az áramerősség időfüggésében szereplő I_0 a létrejövő áram csúcsértéke, míg φ a kezdőfázis. Az áramerősség csúcsértékét a soros váltakozó áramú körökre vonatkozó Ohm törvény alapján határozhatjuk meg:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

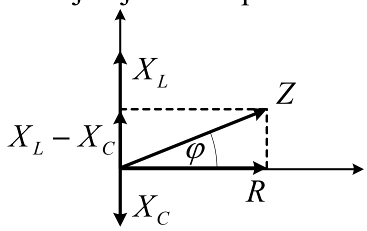
vagy:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

ahol Z a soros kör impedanciája (magyarul a váltakozó áramú ellenállása).
:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

A korábban bevezetett jelölésekkel felrajzoljuk az impedancia vektorábrát.



Impedancia vektorábra

Ebből leolvasható a kezdőfázis:

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

vagy

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Ha $\varphi > 0$ akkor I késik $\mathcal{E}$ -hoz képest, ha $\varphi < 0$ akkor I siet $\mathcal{E}$ -hoz képest.
Hasonlóan a mechanikai rezgéshez, itt is egyik formából a másikba alakul az energia és vissza periódikusan. Amíg az áramerősség nagy, addig a tekercs mágneses mezője erős és ennek $1/2LI^2$ mágneses energiája nagy, azután az áramerősség csökken, a töltés felhalmozódik a kondenzátoron, de akkor meg a kondenzátor $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ energiája lesz nagy (a sztatikában megbeszéltük, hogy ez valójában az elektromos tér energiája).

Az egyes kapcsolási elemek pólusain mérhető feszültségek: Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel. Az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van. Ha $U_{R0} = I_0 R$ az ellenálláson a feszültség csúcsértéke, akkor

$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi)$$

A kondenzátor feszültsége π/2-vel késik az áramhoz képest, azaz

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

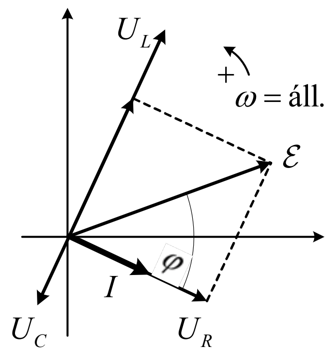
ahol $U_{C0} = I_0 X_C$, a kondenzátoron mérhető feszültség csúcsértéke.

Az ideális tekercs feszültsége π/2-vel siet az áramerősséghez képest:

$$U_{\mathrm{L}}(t)=U_{\mathrm{L0}}\cos\left(\omega\mathrm{t}-\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

ahol $U_{\mathrm{L0}}=I_0X_L$ az induktivitáson mérhető feszültség csúcsértéke.

Forgó vektorábra: A soros RLC kör fázisviszonyainak szemléltetésére gyakran használják a forgó vektoros ábrázolást. Ilyenkor a vektor hossza arányos az illető fizikai mennyiség csúcsértékével, és állandó szögsebességgel forog a síkban az óramutató járásával ellentétes irányban. A vízszintes tengelyre vett vetület harmonikus rezgést végez, ez adja a fizikai mennyiség pillanatnyi értékét.[2] A függőleges tengelynek nincs fizikai jelentése, azért vezettük be, mert vektorokat könnyebb összeadni, mint trigonometrikus függvényeket. Az első vektor, amit egy ilyen ábrázolásnál felveszünk, az áramerősség vektora. Mivel az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van, így az azt leíró vektor az áramerősséggel párhuzamos. Az ideális tekercs feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel siet az áramerősséghez képest, így az ezt ábrázoló vektor, a vektorok forgásának irányában megelőzi az áramerősség vektorát. A kondenzátor feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel késik az áramhoz képest, így a vektora az áramerősség vektorához képest 90°-kal lemarad. A vektorok összege pedig kiadja a generátor elektromotoros erejét. Megjelenik az ábrán a φ fáziskülönbség is.



Forgó vektorábra

Rezonancia soros RLC-körben: Vizsgáljuk meg, hogy egy adott RLC-körben milyen ω frekvenciára lesz maximális az áramerősség. Az

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Összefüggésből leolvasható, hogy ez akkor következik be, ha a nevezőben az impedancia minimális. Mivel a gyökjel alatt álló első tag (R^2) rögzített, a második nemnegatív, akkor lesz minimális a két tag összege, ha a zárójelben álló tag nulla, azaz ha $\mathrm{L}\omega=\frac{1}{\mathrm{C}\omega}$, vagyis a rezonanciafrekvencia

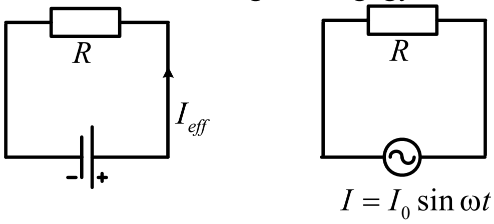
$$\omega_{\mathrm{r}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

Ekkor a kondenzátoron és a tekercsen eső feszültség ugyanakkora, de ellentétes fázisú, így összegük minden pillanatban nulla. Ha R nagyon kicsi, akkor az áramerősség nagyon nagy. Ebből az következik, hogy a tekercsen és a kondenzátoron eső $U_{\mathrm{L0}}=I_0X_L$ és $U_{\mathrm{C0}}=I_0X_C$

[2] Lásd az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolatát az előző félévi jegyzetben.

feszültség is nagyon nagy, sokkal (akár sok ezerszer) nagyobb, mint az áramforrás elektromotoros ereje! Ezért ezt a rezonanciát feszültségrezonanciának is nevezik.

Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel: A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius áram erősségét jelenti. Akár a vizsgált váltakozó áram folyik át egy fogyasztón (jobb oldali ábra), akár egy I_{eff} erősségű stacionárius áram (bal oldali ábra), egy periódus alatt az elektromos munkavégzés megegyezik.



Egyszerű áramkörök az effektív áramerősség bevezetéséhez

$$W = I_{eff}^2 RT \qquad\qquad W = \int_0^T I^2(t) R dt$$

A kétfajta módon kapott munkát egyenlővé téve, az ellenállással egyszerűsítve, T-vel osztva és gyököt vonva kapjuk az effektív értékre vonatkozó általános formulát:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt}$$

Az I(t) helyére $I_0 \sin(\omega t)$-t helyettesítve (ahol természetesen $\omega = \frac{2\pi}{T}$) és a szinusznégyzet-függvényt kiintegrálva belátható, hogy szinuszos váltóáram esetén az effektív érték:

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}.$$

Hasonlóan a generátor effektív feszültsége: $\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$. Ez utóbbi két formula felhasználásával a váltóáramú Ohm törvény egy gyakrabban használt alakba írható:

$$I_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{eff}}{Z} \quad \text{vagy} \quad \boxed{I_{eff} = \frac{\mathrm{U}_{eff}}{Z}}$$

Teljesítmény soros váltakozó áramú körben: A soros áramkör esetén az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \; I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Két ismert trigonometrikus azonosságot ($\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ és $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$) összeadva: $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

Legyen $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$, ekkor:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right] = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi) \ ,$$

így a pillanatnyi teljesítmény:

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right]$$

Ha ennek a függvénynek képezzük az időátlagát, akkor mivel a koszinuszos függvény időátlaga zérus, csak a jobboldali tag marad, mivel az konstans. Az átlagteljesítmény a csúcsértékekkel, vagy az effektív értékekkel kifejezve:

$$\overline{P} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \mathcal{E}_{eff} I_{eff}\cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_{eff}^2 R}{Z^2} = I_{eff}^2 R$$

Mivel a keletkezett hőt ez adja meg, az átlagteljesítményt hatásos teljesítménynek is nevezik. Megjegyezzük, hogy a $P_\ell = \mathcal{E}_{eff} I_{eff}$ mennyiséget látszólagos teljesítménynek, $P_m = \mathcal{E}_{eff} I_{eff}\sin\varphi$-t pedig meddő teljesítménynek nevezik. Utóbbi az áramforrás és a fogyasztó között periodikusan ide-oda áramló energiát adja meg.

Komplex megoldás: Fentebb láttuk, hogy a feszültséget és az áramerősséget forgó vektorokként, az impedanciát álló vektorként tekinthetjük egy kétdimenziós síkon. Utóbbiban az egyes tagokat (az ohmos ellenállást, a tekercs induktanciáját, a kondenzátor kapacitanciáját) soros kapcsolásnál vektorként adjuk össze. Párhuzamos esetben a reciprokokat kellene összeadni, csakhogy vektorokkal nem tudunk osztani, mivel nincs megfelelő szorzásunk.[3] Kiderült, hogy ha a vektorokat egyben komplex számoknak is tekintjük, akkor megfelelő szorzást kapunk és tudunk majd eredő impedanciát számolni tetszőleges kapcsolásnál. Természetesen visszamehetnénk a vektorokról a trigonometrikus függvényekre, azonban ez sokkal nehézkesebb számolásokat eredményezne. Az alábbiakban bemutatjuk a huroktörvény komplex megoldását és levezetjük azokat az összefüggéseket, amelyek a váltóáramú körök megoldásához szükségesek (ez részben az előző oldalakon elmondottak ismétlése lesz).
Az áramforrás feszültségét $U_o e^{i(\omega t+\varphi)}$ alakban adjuk meg (most nem az ε jelölést használjuk elektromotoros erőre), az áramot $\tilde{I} = I_o e^{i\omega t}$ alakúnak vesszük fel. Az áramot tehát fázisállandó nélkülinek tekintjük. Ezt egyébként jogunkban áll megtenni, mivel csupán azt jelenti, hogy az adott jelenség leírásához időmérésünk mikor indul, azaz a stopperóránk indítógombját mikor nyomjuk le. Az összefüggéseinkben a hullámvonallal ellátott szimbólumok komplex mennyiségeket jelölnek. Azt a megállapodást tartjuk szem előtt, hogy a komplex feszültségnek és az áramerősségnek csak a valós része értelmezhető és mérhető fizikailag. Ez a komplex írásmód - a látszat ellenére - jelentősen egyszerűsíti a számolást. A következő formulákat fogjuk használni:

$$\tilde{U}(t) = U_o e^{i(\omega t+\varphi)} = U_o(\cos(\omega t+\varphi) + i\sin(\omega t+\varphi)) = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \tilde{U}_o e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I}(t) = I_o e^{i\omega t} \quad \frac{d\tilde{I}}{dt} = i\omega I_o e^{i\omega t} \quad \frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} = -\omega^2 I_o e^{i\omega t}$$

Az $e^{i\omega t}$ tag miatt forog az áramerősség és a feszültség ω szögsebességgel a komplex síkon az óramutató járásával ellenkező irányban – aki a komplex alakból nem látja, vizsgálja meg a trigonometrikus alakot.
Tekintsük a soros RLC körre vonatkozó inhomogén hurokegyenletet

$$L\frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} + R\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{\tilde{I}}{C} = \frac{d\tilde{U}}{dt}$$

és helyettesítsük be a komplex feszültséget és az áram megfelelő deriváltjait:

$$-L\omega^2 I_o e^{i\omega t} + i\omega R I_o e^{i\omega t} + \frac{I_o}{C} e^{i\omega t} = i\omega U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t}.$$

Osztva mindkét oldalt $i\omega$-val, majd a nevezőből i/i szorzással eltűntetve az imaginárius egységet kapjuk az alábbi egyenletet:

$$iL\omega I_o e^{i\omega t} + R I_o e^{i\omega t} - i\frac{I_o}{\omega C} e^{i\omega t} = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} \qquad (**)$$

Beírva a komplex alakokat:

$$iL\omega\tilde{I}(t) + R\tilde{I}(t) - \frac{i}{\omega C}\tilde{I}(t) = \tilde{U}(t)$$

[3] Sem a skaláris, sem a vektoriális szorzásnál nem igaz, hogy $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$-ből következik $\vec{b} = \vec{c}$, tehát az $1/\vec{a}$-val való szorzás ellentmondásra vezet.

Az első formula bal oldalán azonosíthatjuk az egyes áramköri elemeken jelentkező feszültségeket, s jobboldalon ezek összegét:

$$\tilde{U}_R = R\tilde{I} \qquad \tilde{U}_L = iL\omega\tilde{I} \qquad \tilde{U}_C = -\frac{i}{\omega C}\tilde{I} \tag{*}$$

E formulák egyúttal az Ohm törvény komplex alakjának megnyilvánulásai. Ezek mindegyike

$$\boxed{\tilde{U} = \tilde{Z}\tilde{I}}$$

alakú, ahol $\tilde{Z}$ jelöli hagyományosan a komplex impedanciát:

$$\tilde{Z}_R = R \qquad \tilde{Z}_L = i\omega L = iX_L \qquad \tilde{Z}_C = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C} = -iX_C$$

Ha a fenti egyenletet átrendezzük:

$$\left[i(L\omega - \frac{1}{\omega C}) + R\right]\tilde{I}(t) = \tilde{U}(t),$$

felismerhetjük az eredő komplex ellenállást is, amely a sorba kapcsolt elemek komplex impedanciáinak összege.

$$\tilde{Z}_e = R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C})$$

Ennek az abszolút értékét a Pithagorasz tétellel számolhatjuk:

$$Z_o = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Látható, hogy a soros RLC kör komplex impedanciája az egyes tagok komplex impedanciájának összege. Ugyanígy levezethető, hogy ha több ohmos ellenállás, tekercs, illetve kondenzátor van sorosan kapcsolva, azok impedanciái is összeadódnak:

$$\tilde{Z}_e = \sum_n R_n + i(\omega\sum_m L_m - \frac{1}{\omega}\sum_k \frac{1}{C_k})$$

Megjegyezzük, hogy visszakaptuk azt az egyenáramoknál levezetett szabályt, hogy sorba kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitásának reciproka a kapacitások reciprokainak összege. Tekercsekre mindez csak akkor igaz, ha nincsenek egymással induktív csatolásban.
A komplex Ohm-törvényből meghatározható a feszültség és az áramerősség közötti fázis is az impedancia segítségével. Mind minden komplex mennyiség, így a komplex impedancia is megadható a következő alakban: $\hat{Z} = \hat{Z}_o e^{i\vartheta}$. Ha az áramot választjuk fázisállandó nélkülinek, (azaz $I_o e^{i\omega t}$ alakú) akkor az Ohm törvény a következőkhöz vezet:

$$\tilde{U} = U_o e^{i(\omega t+\varphi)} = Z_o e^{i\vartheta} I_o e^{i\omega t} = Z_o I_o e^{i(\omega t+\vartheta)}$$

Két dolgot látunk: az egyik, hogy a feszültség- és áram-amplitúdókra is érvényes az Ohm törvény: $U_o = Z_o I_o$. Ebből pedig a korábban tárgyalt effektív értékes alak is adódik $\sqrt{2}$-vel való osztás után: $U_{eff}=ZI_{eff}$. A másik fontos észrevétel, hogy $\vartheta = \varphi$, vagyis az impedancia valós tengellyel bezárt szöge adja a fáziskülönbséget:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\mathrm{Z}}}{\mathrm{Re}\,\tilde{\mathrm{Z}}} = \frac{\mathrm{X_L - X_C}}{\mathrm{R}}.$$

Az áram és a feszültség tehát nincs (azonos) fázisban, s e fáziskülönbség a komplex váltakozó áramú ellenállás fázisszögétől származik.
A fentieket alkalmazzuk pl. egy L önindukciós együtthatójú tekercsre: [4]

$$\hat{Z}_L = iL\omega = L\omega e^{i\pi/2} \qquad \hat{U} = \hat{Z}\hat{I} = L\omega I_o e^{i(\omega t+\pi/2)}$$

[4] Felhasználjuk, hogy $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

A feszültség-amplitúdó tehát $U_o = L\omega I_o$. Kiolvashatjuk továbbá azt is, hogy az önindukciós tekercsen a feszültség fázisa 90°-al vagyis $\pi/2$-vel siet az áram fázisához képest. Ha másik mennyiséget választjuk referenciául, akkor ugyanezt a fizikai tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy önindukciós tekercsen az áram 90°-kal késik a feszültséghez képest.
Kimutatható, hogy ha állandó paraméterekkel bíró lineáris hálózaba azonos körfrekvenciájú szinuszos (koszinuszos) elektromotoros feszültségek vannak beiktatva, akkor a stacionárius állapotbeli áramerősségeket és feszültségeket a

$$\sum_i \tilde{I}_i = 0$$

komplex csomóponti és a

$$\sum_i \tilde{I}_i \tilde{Z}_i = \sum_k \tilde{\mathcal{E}}_k$$

komplex huroktörvényekből határozhatjuk meg.
Az egyenáramoknál az Ohm-törvényből és a két Kirchhoff törvényből vezettük le azt, hogy hogyan kell eredő ellenállást számolni soros és párhuzamos kapcsolásnál, ill. hogyan kell ezek segítségével tetszőleges hálózatot megoldani. Itt a fenti három törvény komplex áramerősségekre, feszültségekre és impedanciákra ugyanolyan formában igaz, mint egyenáramok esetében a megfelelő valós mennyiségekre, tehát ugyanúgy levezethetők a megfelelő szabályok. Eszerint, (mint azt már láttuk,) a sorosan kapcsolt konduktív (ohmos) ellenállások eredőjét megadó $R_e = \sum_i R_i$ összefüggés megfelelőjeként a sorba kötött impedanciákra a

$$\tilde{Z}_e = \sum_k \tilde{Z}_k$$

komplex összefüggés érvényes. Hasonlóan, párhuzamosan kapcsolt impedanciák eredője az

$$\frac{1}{\tilde{Z}_e} = \sum_i \frac{1}{\tilde{Z}_i}$$

összefüggés szerint számítható. Az impedancia reciprokát szokás admittanciának is nevezni. A szabály tehát úgy foglalható össze, hogy soros kapcsolásnál a komplex impedanciák, párhuzamosnál a komplex admittanciák összegződnek.

Transzformátor: közös vasmagon van két tekercs. Tegyük fel, hogy az N_1 menetszámú primer tekercs egy áramforrásra van csatolva, amelynek feszültsége: $U_1(t) = U_{1,0}\sin\omega t$. A primer kör ohmos ellenállását elhanyagoljuk, ekkor az áramerősség:
$I_1 = \frac{U_{1,0}}{L_1\omega}(-\cos\omega t)$, ahol $L_1 = \mu\frac{N_1^2 A_1}{l_1}$. A primer tekercsen belül a mágneses tér
$H_1 = N_1\frac{I_1}{l_1}$, ebből az indukció

$$B_1 = \mu N_1 \frac{I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0}/l_1}{\mu\frac{N_1^2 A_1}{l_1}\cdot\omega}(-\cos\omega t) = \frac{U_{1,0}}{A_1 N_1 \omega}(-\cos\omega t)$$

Az indukcióvonalak a vasmagon belül haladnak, ezért a két tekercs egy menetre jutó fluxusa megegyezik: $B_1A_1 = B_2A_2$, azaz $B_2A_2 = \frac{-U_{1,0}}{N_1\omega}\cos\omega t$. A szekunder tekercsben az indukálódott feszültség: $U_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ ahol $\Phi_2 = N_2B_2A_2 = -\frac{N_2U_{1,0}}{N_1}\frac{\cos\omega t}{\omega}$. Ez persze csak akkor igaz, ha a szekunder körben nem folyik áram, vagyis nem zárt az áramkör. A deriválást elvégezve

$U_2(t) = -\frac{N_2}{N_1} U_{1,0} \sin \omega t = -\frac{N_2}{N_1} U_1(t)$, tehát a szekunder feszültség fázisa ellentétes a primerhez képest, a feszültségek nagyságának aránya pedig a menetszámok arányával egyenlő

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen nagy (vagy kicsi) váltakozó feszültséget elő tudunk állítani transzformálással. Transzformátorokat ma is sok helyen használnak, a jó transzformátorok hatásfoka meghaladja a 90%-ot.
Ha a szekunder kört zárjuk, abban is áram folyik, így a fluxus mindkét tekercs esetében megváltozik. Ezt az esetet bonyolultsága miatt nem tárgyaljuk. Azt azonban megjegyezzük, hogy mivel a primer áramkör által leadott teljesítmény jelenik meg a szekunder kör fogyasztóján: $P_1 = P_2$, ebből $U_1 I_1 = U_2 I_2$ vagyis ha a feszültséget feltranszformáljuk, az megfelel az áram letranszformálásának:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Az erőművekben előállított feszültséget feltranszformálják (vagyis az áramot letranszformálják) a távvezetéken történő szállításhoz, hogy a vezetéken elszivárgó teljesítmény $I_2^2 R_{vez}$ kicsi legyen.

A transzformátornak magyar vonatkozása is van, ugyanis az első, energiaátvitelre is alkalmas transzformátort 1885-ben Bláthy Ottó, Déri Miksa és Zipernowsky Károly szabadalmaztatta. A régebbi típusokhoz képest a nagy különbség az volt, hogy ennél a transzformátornál zárt vasmagot alkalmaztak. Így a mágneses erővonalak nem a levegőben, hanem magában a vasmagban záródtak. Mivel a vasmagnak sokkal nagyobb a relatív permeabilitása, mint a levegőnek, így ugyanakkora indukció létrehozásához jóval kisebb gerjesztőáramra volt szükség. A nagy teljesítményű transzformátorok felhasználása az energia-elosztó rendszerben jellemző: 600-700 MVA-es transzformátok is léteznek. A háztartási készülékekben is gyakran alkalmaznak transzformátorokat, ám ezek teljesítménye pár W-tól 1kW-ig terjed, pl.: tv, HI-FI, mikro, DVD lejátszó, nyomtató, stb. Ezen berendezések nélkül elképzelhetetlen lenne a villamos energia ilyen szintű elterjedtsége az óriási veszteségek végett.

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény: Faraday indukció törvénye szerint az időben változó mágneses mező elektromos mezőt kelt. Maxwell elméleti megfontolások alapján feltételezte, hogy az elektromos mező időbeli változása pedig örvényes mágneses mezőt kelt. Az egyenlet felírása során az Ampère-féle gerjesztési törvényt kiegészítette egy további taggal, amelyet eltolási áramnak nevezett. Így született meg az Ampère-Maxwell törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \overrightarrow{D} \overrightarrow{dA}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxust, az Ampère-Maxwell törvény rövidebben:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum \mathrm{I} + \frac{d\Psi}{dt}.$$

A mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a vonalra feszített felületet átdöfő áramok erősségének, és a felületen átmenő elektromos fluxus változási gyorsaságának az összegével. Mágneses mezőt tehát nemcsak mágneses dipólusok, vagy áramok gerjeszthetnek, időben változó elektromos mező is képes mágneses mezőt kelteni. A jelenség szimmetrikus megfelelője a Faraday-féle indukciónak. Az eltolási áram nem áram a szó eredeti értelmében, mert nem mindig kapcsolódik hozzá töltések mozgása. Azonban éppúgy gerjeszt mágneses mezőt, mint a vezetési áram. Jó vezetőben $\left(\gamma \cong 10^7 1/\Omega m\right)$, technikai váltóáram esetén a vezetési áramsűrűség sok nagyságrenddel felülmúlja az eltolási áramsűrűséget. Nem hanyagolható el az eltolási áram szigetelőben, ahol nem folyhat vezetési áram, illetve ha a frekvencia az optikai tartományba esik.

A Maxwell-egyenletrendszer: A XIX. sz. egyik legnagyobb hatású egyenletrendszere, főleg azért, mert ebből az egyenletrendszerből vezették le az elektromágneses hullámok létezését.

1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_n I_n + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial \mathrm{t}},$$

azaz mozgó töltések vagy az időben változó elektromos mező örvényes mágneses mezőt kelt.
2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}},$$

azaz időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt kelt.
3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D}d\vec{A} = Q \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{D}} = \rho,$$

azaz az elektromos tér forrásai a töltések.
4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B}d\vec{A} = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0,$$

vagyis a mágneses tér forrásmentes.
A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához szükségesek az anyagegyenletek is, amelyek megadják, hogy mi a kapcsolat egyfelől az elektromos térerősség és az elektromos indukció, másfelől a mágneses térerősség és a mágneses indukció között. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathrm{E}}$ és $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, valamint az Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ahol a térerősségbe beleértjük az idegen térerősséget is. Míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek csak bizonyos anyagokra igazak, és közelítő jellegűek. Nem adnak számot pl. a ferromágnesesség, ill. a permanens mágnesesek létezésről.